جلسه اول
۱۸ آذر

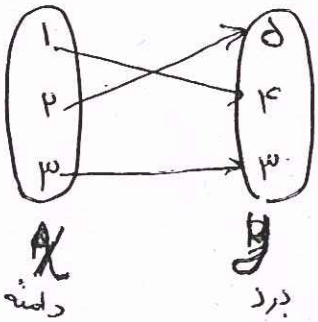
تعریف اولیه تابع

فرض کنید R یک رابطه از مجموعه X به مجموعه Y است به عبارت دیگر R یک تابع از مجموعه X به مجموعه Y است اگر و فقط اگر هر عضو مجموعه X را به یک عضو از مجموعه Y وابسته باشد به عبارتی دیگر یعنی هیچ عضو از X نباشد که به ۲ عضو از Y وابسته باشد (۲ عضو از Y مرتب ها کاملا تکراری نباشند)

- هرگاه اگر $(x,y)\in R$ و $(x,z)\in R$ $\Rightarrow y=z$ باید با هم برابر شوند

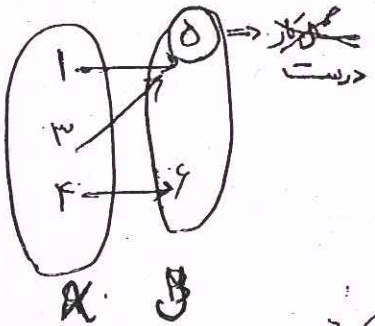
اگر عضو دوم زوج مرتب ها تکراری نباشد یعنی تابع ندارد و تابع می باشد

- مؤلفه اول: درزوج مرتب (x,y) را دامنه و مؤلفه دوم را برد تابع می گوییم



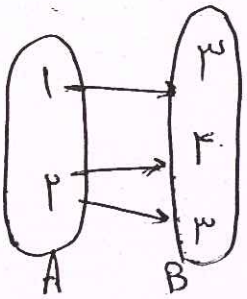
تابع هست

$\{(1,4)\ (2,5)\ (3,4)\}$



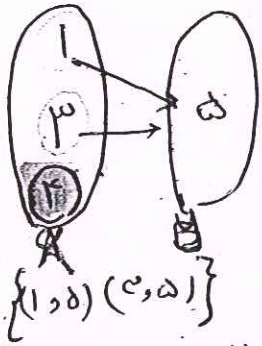
تابع هست

$\{(4,6)\ (3,5)\ (1,5)\}$



$\{(1,3)\ (2,4)\ (3,4)\}$

در عضو یعنی مجموعه Xها یا A ما یک عضو داشته باشد



$\{(1,5)\ (3,5)\ (12,5)\}$

تابع نیست زیرا $4\in A$

عدد ۴ در هیچ عضوی از Y ندارد

۲ عضو از X را به یک عضو از Y برد

است عدد ۴ را اصلا به جایی نبرد

تابع نیست

(۱) نشان دادن تابع بودن یک ضابطه و روش حل آن:

مثال) نشان دهید ضابطه $y^2+3x=4$ تابع هست یا نه؟

(۳) ضابطه ها

حل: ضابطه را بر اساس y ها مرتب می کنیم

(۲) y ها اگر یک مقدار داشت تابع هست ولی اگر داری ۲ مقدار متفاوت بود تابع نیست.

۱) $y^2=4-3x$

$y=\pm\sqrt{4-3x}$ تابع نیست

$4x+y-2x=3$

۲) $2x+y=3$

$y=3-2x$ تابع هست

$x=1\longrightarrow y=1$

با ازای هر x یک y داریم

تعریف دامنه تابع : مجموعه تمام اعدادی است که تابع در آن نقاط تعریف شده است

$\frac{1}{0}$ تعریف نشده نادرست

$\frac{0}{1}=0$ درست

نکته ۱: تقسیم یک عدد بر صفر تعریف نشده

نکته ۲: فرجه (زوج) اعداد منفی تعریف نشده

$\sqrt{-5}$ تعریف نشده $\sqrt[3]{-5}$ تعریف شده

$\sqrt[3]{-5}$ فرجه فرد تعریف شده دارم

$y = 5x + 6$

$D_y = \mathbb{R}$

• حالت اول : دامنه توابع چند جمله‌ای برابر $\mathbb{R}$ است

• حالت دوم : در توابع گویا (کسری) که به صورت $f(x) = \frac{P(x)}{g(x)}$ می‌باشد

به طوری که P و g دو چند جمله‌ای هستند دامنه $f(x)$ برابر است با

$$D_f = \mathbb{R} - \{\text{ریشه مخرج}\}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{g(x)=0\}$$

مثال) دامنه توابع زیر را بیابید ؟

$f(x) = \frac{4x-5}{x+6}$

$x+6=0 \longrightarrow x=-6 \longrightarrow D_f = \mathbb{R} - \{-6\}$

$f(x) = \frac{3x+2}{x^2-2x-1}$

$x^2-2x-8=0 \xrightarrow{\text{تجزیه}} (x-4)(x+2)=0$

$x-4=0 \longrightarrow x=4$

$x+2=0 \longrightarrow x=-2$

(جمع ۲- شود، ضرب ۸- باشد)

$D_f = \mathbb{R} - \{-2, 4\}$

$f(x) = \frac{3}{x^3+4x}$

$x^2+4=0 \longrightarrow x^2 = -4$

ریشه ندارد

کل $\mathbb{R}$

$D_f = \mathbb{R}$

حالت دوم: دامنه توابع رادیکالی با فرجه زوج عبارتند از مجموعه تمامی اعدادی که عبارت زیر رادیکال را بزرگتر یا مساوی صفر کند

حالت ۱ $f(x)=\sqrt[2]{x+5}$ (فرجه ۲)

$x+5\geq 0 \longrightarrow x\geq -5$ $\quad D_f=[-5,+\infty)$

حالت سوم: نوع سوم عبارت داخل رادیکال قابل تجزیه باشد

حالت ۲ $g(x)=\sqrt[2]{x^2-6x+8}$ (فرجه ۲)

$x^2-6x+8\geq 0 \longrightarrow (x-2)(x-4)\geq 0$

$x=2$ ریشه $x-2$

$x=4$ ریشه $x-4=0$

تعیین علامت می‌کنیم

	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$x-2$		−	۰	+		+	
$x-4$		−		−	۰	+	
x^2-6x+8	موافق	+	۰ مخالف علامت	−	۰ موافق علامت	+	موافق

$D_g=(-\infty,2)\cup(4,+\infty)$ یا $D_g=\mathbb{R}-\{2,4\}$

آنهایی که موافق علامت هستند — آنهایی که مخالف علامت a

حالت سوم: نوع سوم عبارت داخل رادیکال قابل تجزیه نبود از راه Δ حل می‌کنیم

$g(x)=\sqrt[2]{x^2-3x+4}$

$x^2-3x+4\geq 0 \longrightarrow$ تابعی زیر رادیکال قابل تجزیه نیست

پس از راه Δ عمل می‌کنیم

[1] $\Delta=b^2-4ac \longrightarrow 9-16=-7<0$

[2] $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

$\Delta<0$ ریشه ندارد

$\Delta=0$ یک ریشه

$\Delta>0$ دو ریشه متمایز

ریشه ندارد

حالت چهارم: دامنه توابع رادیکالی با فرجه فرد عبارتند از بردار در نظر گرفتن دامنه زیر رادیکال و فرجه فرد دامنه زیر رادیکال را به دست می‌آوریم

$f(x)=\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^2+4}}$

$x^2+4=0 \longrightarrow x^2=-4$ ریشه ندارد

$x^2-4\to x=\pm 2$ ریشه دارد

$\Delta=b^2-4ac=0-16<0$

$D_f=\mathbb{R}-\{\text{ریشه مخرج}\}$

انواع تابع

تابع جزء صحیح: تابع جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم و تعریف می‌کنیم $n \leq x < n+1$ دارد / علامت ساعت دارد / ندارد

به طوری که $n \in \mathbb{Z}$ صحیح * نکته بسیار مهم

اگر x بین دو عدد صحیح متوالی قرار بگیرد جزء صحیح x برابر است با عدد قبلی $[x] = n$ آنگاه

$[3,5] = 3$ ← $3 \leq 3,5 < 4$

$[2,25] = 2$ ← $2 \leq 2,25 < 3$

$[5] = 5$ ← $5 \leq 5 < 6$

$[0] = 0$ ← $0 \leq 0 < 1$

$[-2] = -2$ ← $-2 \leq -2 < -1$

$[-3,5] = -4$ ← $-4 \leq -3,5 < -3$

صحیح $\mathbb{Z}$

$\longleftarrow -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \longrightarrow$

طبیعی (IN)

$1 \quad 2 \quad 3 \longrightarrow$

حقیقی (IR)

$\longrightarrow 0, 1, 2, 3, \ldots$

گویا Q

$0,75$ و $\frac{3}{4}$ و ...

• حال اگر $n \in \mathbb{Z}$

$[x+n] = [x] + n$

$[x+2] = [x] + 2$

* نکته مهم: $[x + \frac{1}{5}] \neq [x] + \frac{1}{5}$

دلیل ← $\frac{1}{5} \notin \mathbb{Z}$

تابع ثابت: تابع $f(x)=a$ به طوری که $a \in \mathbb{R}$ باشد را یک تابع ثابت گویند

$f(x) = -2$

$f(0) = -2$

$f(1) = -2$

تابع قدرمطلق

تابع قدرمطلق ۲ ضابطه ای است

به صورت $f(x)=|x|$ بیان می شود این تابع

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

حول همین تابع قدرمطلق همواره ۲ عدد (+) و (-) به خودی گیرد

مثال ۱ ضابطه $y=|x-3|$ را بدون قدرمطلق بنویسید؟

$$|x-3| \Rightarrow \begin{cases} x-3 \longrightarrow x-3 \geq 0 \longrightarrow x \geq 3 \\ \ominus(x-3) \longrightarrow +x+3 < 0 \longrightarrow +x < +3 \end{cases}$$

مثال ۲ ضابطه $y=|4x+3|$ را بدون قدرمطلق بنویسید؟

$$|4x+3| \begin{cases} 4x+3 \longrightarrow 4x+3 \geq 0 \longrightarrow x \geq -\frac{3}{4} \\ -(4x+3) \longrightarrow +4x+3 < 0 \longrightarrow x < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

* ترکیب دو تابع: برای دو تابع f و g ترکیب دو تابع fog یا gof تعریف می کنیم

و به صورت زیر می نویسیم

$$fog(x) = f(g(x))$$
$$gof(x) = g(f(x))$$

خواهد بود

مثال) فرض کنید $f(x)=x+4$ و $g(x)=-x^3+1$ آنگاه fog , gof , fof را حساب کنید؟

۱- $fog(x)=f(g(x))=f(-x^3+1)=x+4$

$\downarrow -x^3+1$

$-x^3+1+4=-x^3+5$

۲- $gof(x)=g(f(x))\Rightarrow g(x+4)=-x^3+1$

$\uparrow x+4$

$-(x+4)^3+1$

۳- $fof(x)=f(f(x))=f(x+4)=x+4=(x+4)+4=x+8$

$\uparrow x+4$

مثال) فرض کنید $f(x)=\sqrt{x}+2x$ و $g(x)=x^2+4$ باشد fog , gof , gog را حساب کنید؟

۱- $fog(x)=f(g(x))\overset{f(x^2+4)}{=}\sqrt{x^2+4}+2(x^2+4)$

$\downarrow x^2+4$ $\quad\rightarrow \sqrt{x}+2x$

۲- $gof(x)=g(f(x))\overset{g(\sqrt{x}+2x)}{=}(\sqrt{x}+2x)^2+4$

$\downarrow \sqrt{x}+2x$ $\quad\rightarrow x^2+4$

۳- $gog(x)=g(g(x))\overset{g(x^2+4)}{=}(x^{\boxed{2}}+4)^{\boxed{2}}+4$

$\downarrow x^2+4$ $\quad\rightarrow x^2+4$

توابع زوج و فرد

منفی $\rightarrow$ فرد

مثبت $\rightarrow$ زوج

تعریف تابع زوج

الف) تابع $f(x)$ را زوج می‌گوئیم هرگاه برای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم

$f(x)=f(-x)$

تعریف تابع فرد

ب) تابع $f(x)$ را فردی گوییم هرگاه برای هر x متعلق به دامنه f داشته باشیم

$$f(-x) = -f(x)$$

مثال) زوج یا فرد بودن تابع را مشخص کنید؟

الف) $f(x) = x^2$

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$ زوج

ب) $f(x) = x^3 - 2x$

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -f(x)$$ فرد

فاکتور

ج) $f(x) = -6$

$$f(-x) = -6 = f(x)$$ زوج

چون تابع ثابت است در هر صورت چه $f(2) = -6$ چه $f(-2) = -6$

نکته: پس تابع ثابت ها همیشه زوج هستند

د) $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$

$$f(-x) = \frac{-x+2}{-x-2} = \frac{(x-2)}{(x+2)} \Rightarrow$$ نه زوج نه فرد چون $* -\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ هیچ حالتی را ندارد

هرجا x بود $-x$ بزار هیز

$-\left(\frac{x+2}{x-2}\right)$

نکته) تنها تابعی که هم زوج است هم فرد صفر است

تعریف تابع یک به یک: تابع f یک به یک است هرگاه $f(x_1) = f(x_2)$ برابر باشد تنها وقتی $x_1 = x_2$ باشد

یا هم برابر باشند

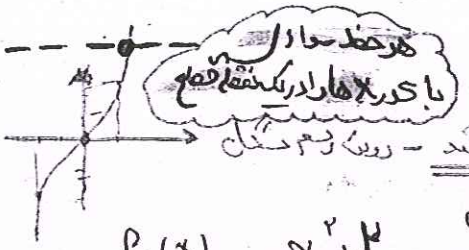
$$\text{if} \quad f(x_1) = f(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$$

مثال صفحه بعد

• نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند؟

• $f(x)=3x^3$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $f(x_1)=f(x_2)$

$3x_1^3=3x_2^3 \longrightarrow x_1^3=x_2^3 \longrightarrow x_1=x_2$ (با زیر فرجه ۳ برابر تا ساده شود)

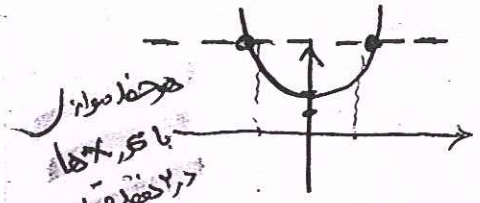


توابع با فرجه‌های فرد یک به یک هستند - روش رسم شکل

$\sqrt[3]{x_1^3}=\sqrt[3]{x_2^3} \longrightarrow x_1=x_2$

هست (چون فرجه فرد دارد برابری میشود اما اگر فرجه زوج بود یک به یک نبود)

• $f(x)=x^2+2$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $f(x_1)=f(x_2)$



$x_1^2+2=x_2^2+2 \longrightarrow x_1^2=x_2^2$

$\longrightarrow x_1=\pm x_2$

نیست (چون فرجه زوج است ۲ مقدار دارد پس یک به یک نیست)

توابع با فرجه زوج یک به یک نیستند

• $f(x)=\sqrt{x+2}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $f(x_1)=f(x_2)$

$\sqrt{x_1+2}=\sqrt{x_2+2}$ $\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}$ $x_1+2=x_2+2$

$x_1=x_2$

هست

تا از زیر رادیکال خارج شود

سؤال امتحانی ۵ صیانا قدم

• $f(x)=\sqrt{2x^2+4}$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $f(x_1)=f(x_2)$

$\sqrt{2x_1^2+4}=\sqrt{2x_2^2+4}$ $\xrightarrow{\text{به توان ۲ می‌رسانیم}}$ $2x_1^2+4=2x_2^2+4$

$2x_1^2=2x_2^2$

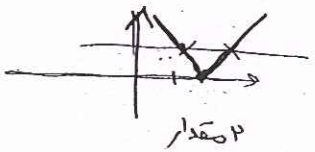
فرجه زوج $x_1^2=x_2^2$

پس ۲ مقدار $x=\pm x_2$

پس یک به یک نیست

• $f(x)=|x-2|$ $\xrightarrow{\text{حل}}$ $f(x_1)=f(x_2)$

$|x_1-2|=|x_2-2|$



توابع قدر مطلقی

پس از طرفین از قدر مطلق دارد ۲ مقدار ± می‌شود

$x_1-2=\pm(x_2-2)$

پس یک به یک نیست

سوال امتحانی میان‌ترم

$f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ ⟹ حل ⟹ $f(x_1)=f(x_2)$

$\frac{x_1-1}{x_1+2}=\frac{x_2-1}{x_2+2}$ ⟶ $(x_1-1)(x_2+2)=(x_1+2)(x_2-1)$

$x_1x_2+2x_1-x_2-2=x_1x_2-2x_1+2x_2-2$

$2x_1+x_1=2x_2+x_2$

$3x_1=3x_2$

$x_1=x_2$ هست.

از اینجا

$f(x)=\sqrt{2x+3}$ ⟹ حل ⟹ $f(x_1)=f(x_2)$

$\sqrt{2x_1+3}=\sqrt{2x_2+3}$ به توان ۲ می‌رسانیم

$2x_1+3=2x_2+3$ ⟶ $2x_1=2x_2$ ⟶ $x_1=x_2$

هست

اول لینا طبقه بندی بید

جلسه دوم ۲۹ آذر

* تابع معکوس: هرگاه تابع $f:A\to B$ تابع یک به یک باشد آنگاه f دارای معکوس است

نکته اول

نکته * کهبا $f:B\to A$ نشان می‌دهیم

تمام توابع مثلثی ۲ $\sin x$ یک به یک نیست ولی معکوس دارد

$\sin x$ Arcsin

مثال: معکوس توابع زیر را بیابید و تمام نکته

** اول باید یک به یک بررسی کرد **

$f(x)=2x^3+3$

$f(x_1)=f(x_2)$ ⟶ $2x_1^3+3=2x_2^3+3$ ⟶ $2x_1^3=2x_2^3$ ⟶ $x_1^3=x_2^3$

$x_1=x_2$

پس یک به یک هست حال میرویم سراغ ضابطه

$y=2x^3+3$ ⟶ $2x^3=y-3$

* x ها یک طرف

$x^3=\frac{y-3}{2}$ ⟶ $x=\sqrt[3]{\frac{y-3}{2}}$ ⟶ $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{\frac{x-3}{2}}$

• حال در مرحله آخر:

هرجا x بود $f(x)$

و هرجا y بود x قرار می‌دهیم

• تابع معکوس توابع زیر را بیابید؟

ب) $f(x)=x^2-2$

$f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow x_1^2-2=x_2^2-2 \longrightarrow x_1^2=x_2^2$

$x_1=\pm x_2$

پس یک به یک نیست و معکوس پذیر نیست

ج) $f(x)=\frac{x+1}{x-3}$

سوال امتحانی

$f(x_1)=f(x_2) \longrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-3}=\frac{x_2+1}{x_2-3}$ طرفین وسطین

$(x_1+1)(x_2-3)=(x_1-3)(x_2+1)$

$4x_1=4x_2 \longrightarrow x_1=x_2$

پس یک به یک است

حال معکوس $y=\frac{x+1}{x-3}$

$xy-3y=x+1$

$xy-x=3y+1$ x ها یک طرف

$x(y-1)=3y+1$

$x=\frac{3y+1}{y-1} \longrightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+1}{x-1}$

در مرحله آخر $f^{-1}(x)$ هرجا x بود هرجا y بود x قرار می‌دهیم

نکته حائز اهمیت در کنکور

* سوال: با یک مثال نشان دهید که ممکن است توابع معکوس پذیر باشند اما یک به یک نباشند؟

کاردر منزل

- $f(x)=\sqrt[2]{x} \longrightarrow \sqrt[2]{x_1}=\sqrt[2]{x_2} \xrightarrow{\text{توان 2}} x_1=x_2$ ✓
- $f(x)=\sqrt[4]{x} \longrightarrow \sqrt[4]{x_1}=\sqrt[4]{x_2} \xrightarrow{\text{توان 4}} x_1^{\frac{1}{4}}=x_2^{\frac{1}{4}} \longrightarrow$ ✓

$x_2=x_1 \xrightarrow{\text{توان 2}} \sqrt[2]{x_1}=\sqrt[2]{x_2}$

مشتقها در حالت کلی

①	$y = a$	$y' = 0$
②	$y = ax$	$y' = a$
③	$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
④	$y = e^x$	$y' = e^x$
⑤	$y = e^{ax}$	$y' = ae^{ax}$
⑥	$y = e^u$	$y' = u'e^u$
⑦	$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
⑧	$y = \ln u$	$y' = \frac{u'}{u}$
⑨	$y = \log_a u$	$y' = \frac{u'}{u} \times \frac{1}{\ln a}$
⑩	$y = a^u$	$y' = u' a^u \times \ln a$
⑪	$y = \sin u$	$y' = u' \cos u$
	$\cos u$	$-u' \sin u$

۱۳) $y = \tan u$ $\quad y' = u'(1+\tan^2 u)$

$y = \cot u$ $\quad y' = -u'(1+\cot^2 u)$

۱۴) $y = \text{Arcsin}u \longrightarrow y' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

$\text{Arccos}u \longrightarrow \dfrac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}$

۱۵) $y = \text{Arctan}u \longrightarrow \dfrac{u'}{1+u^2}$

$\text{Arccot}u \quad \dfrac{-u'}{1+u^2}$

مشتق

مثال) مشتق توابع زیر را حساب کنید؟ الف)

$$y = x^n \longrightarrow y' = n x^{n-1}$$ در حالت کلی

ج) $y = -2x^7 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = (-2)(7)x^{7-1} = -14x^6$

ج) $y = 4\sqrt{x} \longrightarrow y = 4(x)^{\frac{1}{2}} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 4\left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1} = 2x^{-\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{x}}$

د) $y = \frac{2}{x^2} \longrightarrow y = 2x^{-2} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 2(-2)x^{-2-1} = -4x^{-3} = \frac{-4}{x^3}$

مشتق توابع زیر را بیابید؟

الف)

ب) $y = x^2 + \sqrt{x} \longrightarrow y = x^2 + x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow y' = 2x + \left(\frac{1}{2}\right)x^{\frac{1}{2}-1}$

$2x + \left(\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}}$

ادامه دارد ...

ب) $y = x + \frac{1}{x^3} \longrightarrow y = x + x^{-3}$

$y' = 1 + (-3)x^{-3-1} = 1 + (-3)x^{-4} = 1 - \frac{3}{x^4}$

پ) $y = x^5 + 3x^2 + x + 1 \longrightarrow y' = 5x^{5-1} + 3(2)x^{1} + 1$

$5x^4 + 6x + 1$

ج) $y = \underbrace{(x+3)}_{g}{}^2 \xrightarrow[\text{رادیکال بدون مشق نگیریم}]{\text{اول اتحاد مزدوج}} y = x^2 + 6x + 9$

$y' = 2x + 6$

قضیه: اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آنگاه

$$[f(x)g(x)]' = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

مشتق اول در دوم — + — مشتق دوم در اول

ص ۵۷

مثال ۵

$\begin{cases} f(x) = x^3 + x \longrightarrow f'(x) = 3x^2 + 1 \\ g(x) = x^2 - 2 \longrightarrow g'(x) = 2x \end{cases}$

الف) $y = \underbrace{(x^3+x)}_{f(x)}\underbrace{(x^2-2)}_{g(x)}$

$y' = (x^3+x)(2x) + (x^2-2)(3x^2+1)$

$f(x)\ g'(x) \qquad g(x)\ f'(x)$

ب) $y = \underbrace{4x^2}_{f(x)}\underbrace{(x^4-1)}_{g(x)}$ (اول — دوم)

$y' = (x^4-1)(8x) + 4x^2(4x^3)$

$f'(x)\ g(x) \qquad f(x)\ g'(x)$

(۲) قضیه ۵.۷ اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند، $g(x) \neq 0$ باشد

آنگاه

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

مشتق اول ① مشتق دوم ② ③

این قضیه هم کم

مثال: مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y = \frac{x+1}{x-1}$ $\rightarrow f(x)$ / $\rightarrow g(x)$

$f(x) = x+1 \longrightarrow f'(x) = 1$

$g(x) = x-1 \longrightarrow g'(x) = 1$

$$y' = \frac{g(x)f'(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2} = \frac{(x-1)\times 1 - 1\times(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

ب) $y = \frac{x^2}{x^3+1}$ $\rightarrow f(x)$ / $\rightarrow g(x)$

$$y' = \frac{2x(x^3+1) - 3x^2(x^2)}{(x^3+1)^2} \Rightarrow \times$$

ج) $y = \frac{x^2+1}{x^4+2x}$

$$y' = \frac{2x(x^4+2x) - (4x^3+2)(x^2+1)}{(x^4+2x)^2}$$

۱۰ اگر $y = u^n$ ، u تابعی مشتق پذیر از x باشد آن‌گاه

$$y' = n u^{n-1} \cdot u'$$

فرمول دیگر برد

الف) $y = (2x+1)^3$ ⟶ $3(2x+1)^2 \cdot 2$

$3 \to n$ ، $3-1 \to n-1$

$u = 2x+1$ ⟶ $u' = 2$

ب) $y = (5x^2+x)^{10}$ ⟶ $10(5x^2+x)^{9}\cdot(10x+1)$

$10 \to n$ ، $10-1$

$u = 5x^2+x$ ⟶ $u' = 10x+1$

* مثال کم و کاربردی

(۵) امتحانی برای آخر جلسه قبل

ت) $y = \left(\frac{4x^3+1}{2x-1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{2} \to n$

u ← اول مشتق داخل پرانتز

حل) فرض $u = \frac{4x^3+1}{2x-1}$ صورت $f(x)$ ، مخرج $g(x)$

$$\frac{12x^2(2x-1) - 2(4x^3+1)}{(2x-1)^2}$$

$\begin{cases} f(x) = 4x^3+1 \to f'(x) = 12x^2 \\ g(x) = 2x-1 \to g'(x) = 2 \end{cases}$

$y = u^{\frac{1}{2}}$ ⟶ $\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u'$

$\frac{1}{2} \to n$ ، $\frac{1}{2}-1 = -\frac{1}{2}$

$$y' = \frac{1}{2}\left[\frac{16x^3 - 12x^2 - 2}{(2x-1)^2}\right]\left(\frac{4x+1}{2x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

جلسه دهم — مشتق ①

تعریف ۱: (مشتق در یک نقطه) فرض کنید تابع f در یک همسایگی a تعریف شده است. مشتق تابع f در نقطه‌ی a که با نماد $f'(a)$ نشان داده می‌شود عبارت است از

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

به شرط آنکه این حد وجود داشته باشد. در این صورت می‌گوییم تابع f در a مشتق‌پذیر است.

حال اگر قرار دهیم $x - a = h$ آنگاه $x = a + h$ و در نتیجه $x \to a$ معادل است با $h \to 0$

بنابراین، تعریف فوق به صورت زیر در می‌آید

تعریف ۲: $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ وجود داشته باشد، گوییم f در a مشتق‌پذیر است.

مثال: اگر $f(x) = 3x^2 + x$ در این صورت $f'(1)$ را بدست آورید؟ (براساس تعریف مشتق)

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + x - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

$x_1 = 1$ ، $x_2 = -\frac{4}{3}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(3x+4)}{x-1} = \lim_{x \to 1} (3x+4) = 7$$

روش اول ← حل براساس تعریف ۱

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3(1+h)^2 + (1+h) - 4}{h}$$

$1 + h^2 + 2h$

روش دوم ← حل براساس تعریف ۲

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 7h + 4 - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(3h+7)}{h} = 7$$

تعریف تابع مشتق: (ب) تابع f' که با ضابطه

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

تعریف می‌شود مشتق f است. به x ی گوییم

• دامنه‌ی f'، عبارت است مجموعه نقاطی که تابع f در آنها مشتق پذیر است

مثال: (۱ حالتی) $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در $x = 0$ مشتق پذیر است؟

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \sin \frac{1}{0} = \infty$$

چون حد وجود ندارد پس

تابع f در $x = 0$ مشتق پذیر نیست

مثال: کدام یک از موارد زیر در مورد تابع $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ در نقطه $x = 0$ درست است؟

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 \times \text{(کران‌دار)} = 0$$

در $x = 0$ مشتق پذیر است

یا $x \sin x$

ما بقی تعریف مشتق از یک جزوه ساده گرفته شد

* مشتق توابع زیر را بدست آورید:

$f(x) = x^2 \to f'(x) = 2x$

$f(x) = x^4 \to 4x^3$

$f(x) = x^3 - 5x^2 \to 3x^2 - 10x$

$f(x) = \sin x - x^5 - 8x^4 + 3 \to 11x^{10} - 40x^4 - 3$

اینها را نگویند از بعد از تعریف مشتق

صفحه بعد

مشتق

تابع پیوسته $f(x)$ را در نظر بگیرید مشتق $f(x)$ را با $f'(x)$ نشان می‌دهند و با استفاده از حد تعریف می‌کنیم

① $f(x)=a \longrightarrow f'(x)=0$

② $f(x)=ax \longrightarrow f'(x)=a$

③ $f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

زیر مشتق تابع $f(x)$ را بدست آورید

$f(x)=-3 \quad f'(x)=0$

$f(x)=2x \quad f'(x)=2$

$f(x)=4x-5 \quad f'(x)=4$

$f(x)=x^3 \quad f'(x)=3x^2$

$f(x)=x^{-4} \quad f'(x)=-4x^{-5}$

$f(x)=7x^3 \quad f'(x)=21x^2$

دقت کنید مشتق هست نه انتگرال

$f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow x^{\frac{1}{2}} \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$

نکته: $\sqrt[n]{x^m}=x^{\frac{m}{n}}$ از فرمول بالا استفاده شود

$f(x)=2\sqrt{x^3} \longrightarrow 2x^{\frac{3}{2}} \longrightarrow f'(x)=2\times\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}=3x^{\frac{1}{2}}=3\sqrt{x}$

$f(x)=\frac{1}{x^2} \longrightarrow x^{-2} \longrightarrow -2x^{-2-1}=-2x^{-3}$

$f(x)=\frac{4}{x^3} \longrightarrow 4x^{-3} \longrightarrow 4(-3)x^{-3-1}=-12x^{-4}$

④ $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x \quad e\cong 2/7$

⑤ $f(x)=e^u \longrightarrow f'(x)=u'e^u$ جنابکم

$f(x)=e^{2x} \longrightarrow f'(x)=2e^{2x}$ ($u=2x$, $u'=2$)

$f(x)=e^{5x^2} \longrightarrow 10xe^{5x^2}$

$f(x)=e^{-5x} \longrightarrow f'(x)=-4e^{-5x}$ ($u=-5x$, $u'=-4$)

$f(x)=e^{x^3} \longrightarrow 3x^2e^{x^3}$

⑥ $f(x)=\ln x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$

⑦ $f(x)=\ln u \longrightarrow f'(x)=\frac{u'}{u}$

این دو تا صفت قابل صفارند هستند

$\cdot f(x)=\ln(x^2) \longrightarrow f'(x)=\frac{2x}{x^2}=\frac{2}{x}$

$\cdot f(x)=\ln(5x^2+2x-1) \longrightarrow f'(x)=\frac{10x+2}{5x^2+2x-1}$

⑧ $f(x)=\sin u \longrightarrow f'(x)=u'\cos u$

⑨ $f(x)=\cos u \longrightarrow f'(x)=-u'\sin u$

$\sin x \to \cos x$

$\cos x \to -\sin x$

$f'(x)=\cos(5x)=-5\sin 5x$

$\cdot f(x)=\sin(2x) \longrightarrow 2\cos 2x$

$\cdot f(x)=\sin(e^x) \longrightarrow e^x\cos(e^x)$

$\cdot f(x)=\sin(5x^2) \longrightarrow 10x\cos(5x^2)$

$\cdot f(x)=\cos(3x^2-1) \longrightarrow -6x\sin(3x^2-1)$

$\cdot f(x)=-5x^3-3x^2+2x-5$

$f' \downarrow$

$-15x^2-6x+2$

• مشتق توابع زیر را بیابید؟

$f(x)=\sin(5x)-\cos(4x^2)$

$f'(x)=5\cos(5x)-(8x)(-\sin 4x^2)$

$5\cos 5x+8x\sin x^2$

⑩ ۲ حالت کلی و پرکاربرد

$f(x)=x^n \longrightarrow f'(x)=nx^{n-1}$

$f(x)=u^n \longrightarrow f'(x)=nu^{n-1}\,u'$ ضرب در مشتق

حتما یاد بگیرید

$f(x)=(2x-5)^3 \xrightarrow{u=2x-5} 3(2x-5)^2\cdot 2$

$$f(x)=(2x^2-4)^2 \longrightarrow u^2 \longrightarrow 2(2x^2-4)^1\cdot 4x$$

$u=2x^2-4 \longrightarrow u'=4x$

$2u^{n-1}\cdot u'$ حال جایگذاری در فرمول

$$f(x)=(e^{2x}-1)^4 \longrightarrow u^4 \longrightarrow 4(e^{3x}-1)^3\cdot 3e^{3x}$$

$4u^{n-1}\cdot u'$ حال جایگذاری در فرمول

$u=e^{3x}-1 \longrightarrow u'=3e^{3x}$

$a^{0}=1$
$a^{x}=a\,e$
$e^{2x}=2e$
$e^{3x}=3e$

$$f(x)=\ln(2x-1)^2 \xrightarrow{\ln u^2} \frac{u'}{u}$$

$nu^{n-1}\cdot u'$

$u=(2x-1)^2 \longrightarrow u'=2(2x-1)^1\cdot 2$

$4(2x-1)$

$u=2x-1$ مشتق $2x$ برابر 2

$$f'(x)=\frac{2(2x-1)\cdot 2}{(2x-1)^2}=\frac{4(2x-1)}{(2x-1)^2}$$

قضایای مشتق

فرض کنید u و v دو تابع برحسب x باشند داریم

[1] $(u\pm v)'=u'\pm v'$

[2] $(uv)'=u'v+v'u$ ضرب

جمع و ضرب متقارن هستند

(اولی × مشتق دومی) + (دومی × مشتق اولی)

[3] $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ $\frac{\text{(مشتق صورت × مخرج) − (مشتق مخرج × صورت)}}{\text{(مخرج)}^2}$

$$f(x)=\underbrace{(3x^2-5)}_{u}\underbrace{(4x-1)}_{v}$$

$\begin{cases} u=3x^2-5 \longrightarrow u'=6x \\ v=4x-1 \longrightarrow v'=4 \end{cases}$

حال در فرمول جایگذاری می‌کنیم

$$f'(x)=u'v+v'u=(6x)(4x-1)+4(3x^2-5)$$

$$f(x) = \underbrace{e^{x}}_{u} \underbrace{\sin(5x)}_{v}$$

$$\begin{cases} u = e^{x} \longrightarrow u' = 1e^{x} \\ v = \sin(5x) \longrightarrow v' = 5\cos(5x) \end{cases}$$

$$f'(x) = \underbrace{e^{x}}_{u'}\underbrace{\sin(5x)}_{v} + \underbrace{5\cos 5x}_{v'} \cdot \underbrace{e^{x}}_{u}$$

حال در فرمول جایگذاری می‌کنم

$$f(x) = \underbrace{(5x-3)^{3}}_{u}\underbrace{(x+1)}_{v}$$

$$\begin{cases} u = (5x-3)^{3} \longrightarrow u' = 3(5x-3)^{2}\cdot 5 \\ v = x+1 \longrightarrow v' = 1 \end{cases}$$

حال در فرمول جایگذاری می‌کنم

$$f'(x) = \underbrace{3(5x-3)^{2}}_{u'}\underbrace{(x+1)}_{v} + \underbrace{1}_{v'}\underbrace{(5x-3)^{3}}_{u}$$

$$f(x) = \sin^{3}x \cdot \cos^{2}x$$

$\cos^{2}x \to 2\cos x \cdot \sin x$ یا $(1-\sin^{2}x)$

$$f'(x) = \underbrace{3\cos 3x}_{u'}\underbrace{(\cos^{2}x)}_{v} + \underbrace{2}_{v'}\underbrace{(1-\sin^{2}x)\cdot\sin 2x}_{u}$$

$$\begin{cases} u = \sin^{3}x \longrightarrow u' = 3\cos^{3}x \\ v = \cos^{2}x \longrightarrow v' = 1-\sin^{2}x \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\sin\underbrace{(5x^{2}+1)}_{u}}{\underbrace{\cos x}_{v}} \longrightarrow \frac{\overbrace{10x\cos(5x^{2}+1)}^{u'}\cdot\overbrace{(\cos x)}^{v} - \overbrace{(-\sin x)}^{v'}\overbrace{\sin(5x^{2}+1)}^{u}}{(\cos x)^{2}}$$

$\sin u \to u'\cos u$

$$\begin{cases} u = \sin\overbrace{(5x^{2}+1)}^{u} \longrightarrow u' = 10x\cos(5x^{2}+1) \\ v = \cos x \longrightarrow v' = -\sin x \end{cases}$$

$\sin u \Rightarrow u'\cos u$

* حالا اینشکل $(\frac{5x+1}{5x^{2}+1})^{\frac{1}{2}}$ هم کشته نیست ورنه

مشتق مراتب بالاتر

مشتق مرتبه اول را $f'(x)$ و مشتق $f(x)$ را با $f''(x)$ می‌نامیم یعنی ۲ بار از تابع f مشتق گرفتیم به x مشتق مرتبه دوم را $f''(x)$ و سه بار $f'''(x)$ یعنی ۳ بار از f مشتق می‌گیریم به همین ترتیب مشتق مرتبه n ام را با $f^{(n)}$ نشان می‌دهیم یعنی n بار از f مشتق می‌گیریم.

الف) $f(x) = 7x^{3} - 2x^{2} + x - 1$

$$f'(x) = 21x^{2} - 4x + 1$$

$$f''(x) = 42x - 4$$

$$f'''(x) = 42$$

سلطانی ← امور دارال
۲۵ ← ۱۱

سوال آخر: $g(x) = \ln(x^2+2x)$ (u)

$\ln u = \frac{u'}{u}$ مشتق مرتبه اول ◻ $g'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x}$ (u / v)

$\begin{cases} u = 2x+2 \longrightarrow u' = 2 \\ v = x^2+2x \longrightarrow v' = 2x+2 \end{cases}$

مشتق مرتبه دوم $g''(x) = \frac{uv - vu'}{v^2} = \frac{2(x^2+2x) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2+2x)^2}$

سوال آخر: $f(x) = \sin(3x^2-4)$ (u) $\quad u'\cos u$

$f'(x) = \frac{6x}{u}\cos\frac{(3x^2-4)}{v}$

جایگذار $\begin{cases} u = 6x \longrightarrow u' = 6 \\ v = \cos(3x^2+4) \longrightarrow v' = 6x - \sin(3x^2+4) \end{cases}$

$f''(x) = u'v + v'u = 6(\cos(3x^2-4)) + 6x(-6\sin(3x^2-9)\cdot 6x$

$\sin^n u \longrightarrow n\sin^{n-1} u \cdot u'$

~~$f(x) = \sin(4x)$~~ ~~$f'(x) = 4\sin'(4x)\cdot\cos 4x$~~

سوال: اگر $\sin 0 = 0$ و $\cos 0 = 1$ باشد، $f(x) = \cos 4x$ حاصل $f^{(4)}(0)$ را بدست آورید؟

$f(x) = \cos 4x$

$f'(x) = -4\sin 4x$

$f''(x) = -16\cos 4x$

$f''' = (-16)(4)(-\sin 4x) = 64\sin 4x$

$f^4 \Rightarrow (64)(4)\cos 4x = 256\cos 4x = 256$

مشتق مرتبه دوم عبارات زیر را بدست آورید؟

$f(x) = \ln(\sin x)$ $\quad \ln u = \frac{u'}{u}$

- $f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ صورت u مخرج v $\quad \frac{u'v - vu'}{v^2}$ $\quad \begin{cases} u = \cos x \longrightarrow u' = -\sin x \\ v = \sin x \longrightarrow v' = \cos x \end{cases}$

حال در فرمول جایگذاری می‌کنیم

- $f''(x) = \frac{(-\sin x)(\sin x) - (\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x}$

$u' \quad v \quad v' \quad u \qquad u^2$

$g(x) = \sin^2(\underbrace{5x-1}_{u})$

برای حل این فرمول (*) را بیابانگ

$g'(x) = 2\sin^{2-1}(5x-1)\cdot(5\cos(5x-1))$ فرض $u = 5x-1$

g'' بگیرید $\Rightarrow$ u, v فرمول * $\boxed{\sin^n u = n \sin^{n-1} u \cdot u' \cos u}$ *

$f(x) = \sin^3 x$ در $x=0$، $\sin 0 = 0$ آنگاه $f^{(5)}(0)$ را بدست آورید؟

$\cos 0 = 1$

$f(x) = \sin^3 x$

$f'(x) = 3\cos 3x$

$f''(x) = -9\sin 3x$

$f''' = -27\cos 3x$

$f^{(4)} = +81\sin 3x$

$f^{(5)} = 243\cos 3x \Rightarrow 243 \times 1 = 243$

مشتق ضمنی

* این جزوه را دانلود کنید و مشتق بگیرید برای کارشناسی *

تعریف: در بعضی از موارد نمی‌توان تابع را به صورت $y = f(x)$ نوشت به عنوان مثال در معادله $e^{x} - 3x^{2}y^{3} + 5xy = 0$ نمی‌توانیم y را برحسب x بدست آوریم لذا می‌توان تابع را به صورت زیر بازنویسی کرد که به آن تابع ضمنی گویند

$$y' = -\frac{f'(x)}{f'(y)}$$

$f'(x)$ یعنی مشتق f نسبت به x

$f'(y)$ یعنی مشتق f نسبت به y

مثال: $3x^{2}y^{3} + 5xy - e^{x} = 0$

$$f'(x) = 6xy^{3} + 5y - e^{x}$$
$$f'(y) = 9x^{2}y^{2} + 5x$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{9x^{2}y^{2} + 5y - e^{x}}{6x^{3}y + 5x}$$

$$e^{xy} + 7x^{2}y^{3} = 5xy - 9y$$

$$e^{xy} + 7x^{3}y^{2} - 5xy + 9y = 0$$

$$f'(x) = ye^{xy} + 21x^{2}y^{2} - 5y$$
$$f'(y) = xe^{xy} + 14x^{3}y - 5x + 9$$

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y} = -\frac{ye^{xy} + 21x^{2}y^{2} - 5y}{xe^{xy} + 14x^{3}y - 5x + 9}$$

$$\cos(xy) = 7xy \longrightarrow \cos(xy) - 7xy = 0$$

$$f'(x) = y\cdot -\sin(xy) - 7y$$
$$f'(y) = x - \sin(xy) - 7x$$

$$y' = -\frac{-y\sin(xy) - 7y}{-x\sin(xy) - 7x}$$

مشتق برداری

مثال: اگر $x^{2} + 2y^{2} + 3xy$ مقدار y' را در نقطه $(1, 3)$ بدست آورید؟

$$f'(x) = 2x + y$$
$$f'(y) = 4y + x$$

$$y' = -\frac{2x + y}{4y + x} = -\frac{2(3) + 1}{4(3) + 1} = -\frac{7}{13}$$

۹. ضمیمه انتگرال‌ها

یک دسته فرمول اولیه برای حل انتگرال‌های معین

① $\int dx = x + C \longrightarrow \int_1^2 dx = (2-1) + C$

② $\int a\,dx = ax + C \longrightarrow \int 3\,dx = 3x + C$

③ یکبار $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \longrightarrow \int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C$

④ $\int \sin ax\,dx \xrightarrow{\text{ضدمشتق}} -\frac{1}{a}\cos ax + C$

⑤ $\int \cos ax\,dx \longrightarrow \frac{1}{a}\sin ax + C$

⑥ $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

⑦ $\int e^x dx = e^x + C$

⑧ $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C$

⑨ $\int \underset{\cot ax}{\tan ax}\,dx = -\frac{1}{a}\ln|\cos ax| + C$
$+\frac{1}{a}\ln|\sin ax| + C$

انتگرال

جلسه دوم

تعریف: تابع f بر بازه $[a,b]$ را انتگرال‌پذیر گویند هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f) = \lim_{n\to\infty} U_n(f)$$

(حد پایین = حد بالا)

انتگرال‌پذیری بودن

۲ نوع انتگرال: ۱- انتگرال معین ۲- انتگرال نامعین

$\int_a^b f(x)dx$ ← مقدار ثابت

$\int f(x)dx$ ← تابع

⊙ برخی ویژگی‌های انتگرال معین:

ویژگی (۱) $\int_a^b dx$ عبارت است از انتگرال تابع ثابت $f\equiv 1$ در بازه $[a,b]$ و

می‌توان ثابت کرد:

$$\int_a^b dx = b-a$$

مثال $\int_1^3 dx = 3-1 = 2$

ویژگی (۲) اگر f در بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و k یک عدد حقیقی ثابت باشد آنگاه

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \longrightarrow \int_2^4 3x^2dx = 3\int_2^4 x^2dx$$

(بیرون)

ویژگی (۳) اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر در بازه $[a,b]$ باشند آنگاه

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

($f(x)+g(x) = 3x^2+4x$)

$$\int_a^b f(x)dx =$$

* قضیه: اگر f در بازه‌ای که شامل نقاط a, b, c است انتگرال‌پذیر باشد داریم

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

لزوماً عدد c بین a و b نیست

انتگرال توابع پله‌ای

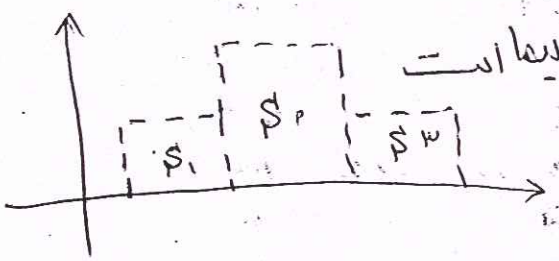
فرض می‌کنیم E تابعی پله‌ای باشد که بر $[a,b]$ تعریف شده و این فاصله را بوسیله n تا نقطه افراز می‌کنیم، در این حالت انتگرال E از a تا b را که با علامت $\int_a^b E(x)\,dx$ نشان داده می‌شود به صورت

$$\int_a^b E(x)\,dx = S_1 + S_2 + \cdots + S_n$$

تعریف می‌کنیم با توجه به نمودار در حالتی که $E(x) = c$ باشد در این حالت

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a)$$

و مجموع مساحتهای مطلوب برای هر بازه ثابت است و برابر مجموع مساحتهای مستطیلهاست



در مثال بیشتر با این موضوع آشنا می‌شویم

خاصیت‌ها • خواص انتگرال توابع پله‌ای :

۱) $$\int_a^b \big(E(x)+f(x)\big)\,dx = \int_a^b E(x)\,dx + \int_a^b f(x)\,dx$$

۲) $$\int_a^b kE(x)\,dx = k\int_a^b E(x)\,dx$$

۳) اگر $x\in[a,b]$ باشد $E(x) < f(x)$ آنگاه

$$\int_a^b E(x)\,dx < \int_a^b f(x)\,dx$$

۴) به شرط $a<c<b$ باشد (عبارت c بین a و b باشد)

$$\int_a^c E(x)\,dx + \int_c^b E(x)\,dx = \int_a^b E(x)\,dx$$

(۵) $\int_a^a E(x)\,dx = 0$

(۶) $\int_a^b E(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} E(-x)\,dx$ — اگر جاهای عرض و طول منفی می‌گیرد

(۳) (A) این نکته هم

مثال $\int_1^1 x\,dx = 0$

$\frac{x^2}{2}\Big|_1^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$

مثال) مقدار انتگرال $\int_{-1}^{2} [x]\,dx$ (جزء صحیح) را حساب کنید؟

حل: $[-1, 2]$ را به زیرفاصله‌های مانند $[-1, 0)$ و $[0, 1)$ و $[1, 2]$ افراز می‌کنیم

می‌توان بازه نیم‌باز

$$S = \int_{-1}^{2} [x]\,dx = \underbrace{\int_{-1}^{0} [x]\,dx}_{S_1} + \underbrace{\int_{0}^{1} [x]\,dx}_{S_2} + \underbrace{\int_{1}^{2} [x]\,dx}_{S_3}$$

در فاصله $-1 \le x < 0$ جزء صحیح -1 است

$$S_1 = \int_{-1}^{0} [x]\,dx = \frac{-1}{c}(0+1) = -1 \quad (b-a)$$

در فاصله $0 \le x < 1$ جزء صحیح 0 است

$$S_2 = \int_{0}^{1} [x]\,dx = \frac{0}{c}(1-0) = 0 \quad b-a$$

در فاصله $1 \le x < 2$ جزء صحیح 1 است

$$S_3 = \int_{1}^{2} [x]\,dx = \frac{1}{c}(2-1) = 1 \quad b-a$$

$S_1 + S_2 + S_3 =$

$-1 + 0 + 1 = 0$

پاسخ انتگرال مورد نظر ما صفر می‌باشد

مثال) $\int_0^3 [x]\,dx = \int_0^1 [x]\,dx + \int_1^2 [x]\,dx + \int_2^3 [x]\,dx$

$\int_0^1 0\,dx + \int_1^2 1\,dx + \int_2^3 2\,dx$

$0(1-0) + 1(2-1) + 2(3-2) = 1 + 2 = 3$

انتگرال نامعین (تابع اولیه)

عمل انتگرال گیری را عمل عکس مشتق گیری می نامیم به عبارتی اگر $\frac{dy}{dx} = f(x)$ باشد آنگاه تابعی مانند y را چنان تعیین می کنیم که از مشتق گیری آن تابع f بدست آید

اگر چنین تابعی موجود باشد آنرا انتگرال نامعین می نامیم و به صورت

$$\int dy = \int f(x)\,dx$$

نشانی دهم

مثال: اگر $dy = 2x^5 dx$ باشد آنگاه $\int dy = \int 2x^5 dx$ و در ادامه $y = \frac{1}{3}x^7 + c$ یا $y = \frac{2}{7}x^7 + c$ و ملاحظه می شود $\frac{dy}{dx} = 2x^5$ یعنی $y = 2x^5$

نتیجه ۱: اگر c مقدار ثابتی باشد آنگاه $\int c f(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

نتیجه ۲: اگر f و g دو تابع باشند انتگرال پذیرا آنگاه

$$\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

نتیجه ۳: اگر $n \neq -1$ آنگاه $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

$n \neq -1$ زیرا اگر $n=-1$ باشد $\frac{1}{0}$ عددی تعریف نشده

نتیجه ٤: اگر u تابعی از x باشد $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

قواعد انتگرال گیری

۱) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$

۲) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{Arc}\tan x + c$ ⟵ ایزوآبلو

۳) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

۴) $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

نتیجه ۴) قواعد انتگرال گیری عکس مشتق گیری

۵) $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

۶) $\int \cos x\,dx = +\sin x + c$

مثال ها:

۱) $\int (x^2 + x + 1)\,dx = ?$

فرمول داریم $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$\int x^2 dx + \int x\,dx + \int 1\,dx$

$\frac{1}{2+1}x^{2+1} + \frac{1}{1+1}x^{1+1} + x + c = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c$

مثال ۲

$$\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$$

۳

$$\int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}dx$$

$$\int (\cos x + 2\sin x)\,dx = \int \cos x\,dx + 2\int \sin x\,dx$$

$\sin x$ ⊖ $2\cos x + C$

۴

$$\int (\sqrt[5]{x} - 1)\,dx = \int (x^{\frac{1}{5}} - 1)\,dx = \int x^{\frac{1}{5}}dx - \int 1\,dx$$

$$\frac{1}{\frac{1}{5}+1}x^{\frac{1}{5}+1} - x + c = \frac{5}{6}x^{\frac{6}{5}} - x + C$$

۵

$$\int (8 - 2x)\,dx \Rightarrow$$ تابع چون $\int$ مقدار ابتدا را نمی‌گیرد / بازه ندارند b, a

$$\int 8\,dx - \int 2x\,dx$$

$$8x - 2\frac{x^2}{2} + c = 8x - x^2 + C$$

۶

$$\int (x^3 - 6x^2 + 9x + 1)\,dx = \int x^3dx - 6\int x^2dx + 9\int x\,dx + \int 1\,dx$$

$$\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^3}{3} + 9\frac{x^2}{2} + x + C$$

جلسه سوم

انتگرال معین

• فرض کنیم f تابعی پیوسته بر بازه بسته $[a,b]$ باشد و برای هر x از $[a,b]$ داشته باشیم $F'(x)=f(x)$ در این صورت $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

مثال)
$$\int_1^2 4x^3dx = ?$$

$$\int_1^2 4x^3dx = F(2)-F(1) = x^4\Big|_1^2 \Rightarrow F(x)=x^4$$

$$x^4\Big|_1^2 = 2^4-1^4 = 15$$

$F(2)-F(1)$

• نتیجه: اگر n عدد گویای دلخواهی باشد که بازاء آن تابع $f(x)=x^n$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه
$$\int_a^b x^n dx = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1}-a^{n+1}\right)$$

مثال) انتگرال معین
$$\int_1^4 (6x^2-4x+5)dx = ?$$

حل:
$$(6x^2-4x+5)dx\Big|_1^4 = 6\left(x^2dx\right)\Big|_1^4 - 4\left(xdx\right)\Big|_1^4 + 5dx\Big|_1^4$$

$$2x^3\Big|_1^4 - 2x^2\Big|_1^4 + 5x\Big|_1^4$$

$$2\left(4^3-1^3\right) - 2\left(4^2-1^2\right) + 5(4-1) = 111$$

مثال انتگرال معین

[1] $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = ?$

نکته ارل : انتگرال هیچ ضد مشتق‌ینی

$$\left.\begin{array}{l} \text{مشتق} \left[\int \sin x\,dx = \cos x\right] \\ \text{انتگرال ضد مشتق} \left[\int \sin x\,dx = -\cos x + C\right] \end{array}\right\} \text{با} \left\{\begin{array}{l} \text{مشتق} \int \cos x\,dx = -\sin x \\ \int \cos x\,dx = +\sin x + C \end{array}\right.$$

حل مثال $\int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = -\cos x \Big|_0^{\pi/2} = +(\overbrace{\cos\frac{\pi}{2}}^{0}) - (\overbrace{-\cos 0}^{-1}) = 0 + 1 = 1$

[2] $\int_0^4 (8-2x)\,dx = (8-2x)\,dx \Big|_0^4$

$$8\,dx\Big|_0^4 - 2x\,dx\Big|_0^4$$

$$8x\Big|_0^4 - 2\frac{x^2}{2}\Big|_0^4 = 8(4-0) - (4^2 - 0^2)$$

$$32 - 16 = 16$$

سایر مثالها

[3]

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
(معاونت امور آموزشی)

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

ماتریس ها و ریاضی پیش

ملاصدرا کسری

(۱)

نام و نام خانوادگی:
نام درس:
شماره دانشجویی:
نام استاد:
رشته تحصیلی:
تاریخ آزمون:

ماتریس ها

هر ماتریس جدولی است مستطیل شکل که دارای m سطر و n ستون می باشد و تعداد $m \times n$ عدد یا عبارت جبری در آن نوشته شده است و هر کدام از آنها را یک درایه ماتریس می نامند مانند ماتریس های زیر

$$\begin{bmatrix} x-y & x+2y \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

ماتریس A دارای m سطر و n ستون باشد به صورت $A_{m \times n}$ و درایه های آن را که در تقاطع سطر i ام و ستون j ام قرار دارند به صورت a_{ij} نشان میدهیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

درایه ها به صورت زیری باشند

$a_{11} = 2 \quad a_{12} = 3 \quad a_{21} = 5 \quad a_{22} = -1$

انواع خصوصی از ماتریس ها به صورت زیر نام گذاری می شوند

الف) ماتریس مربع ماتریسی را گویند که تعداد سطرهایش با تعداد ستونهایش برابر باشد

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 9 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$$

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته تحصیلی:

نام درس: نام استاد: تاریخ آزمون:

۲) ماتریس سطری: ماتریسی است که فقط یک سطر دارد

$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \end{bmatrix}$

ماتریس ستونی: ماتریسی است که فقط یک ستون دارد

$\begin{bmatrix} ۳ \\ -۱ \\ ۴ \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}$

ماتریس صفر: ماتریسی است که همه درایه‌هایش صفر باشند $\bar{0}_{۲\times۲}$ $\bar{0}_{۳\times۳}$

$\bar{0}_{۳\times۳} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ $\bar{0}_{۲\times۲} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$

مقدار ماتریس مربع: در هر ماتریس مربع مقدار از گوشه بالا سمت چپ تا گوشه پایین سمت راست کشیده می‌شود مقدار اصلی و مقدار دیگر را مقدار فرعی می‌نامند، منظور از مقدار همواره مقدار اصلی است

مثلاً: در ماتریس $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۱ & ۵ & ۷ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix}$ درایه‌های ۱، ۵، ۹ مقادیر اصلی، ۳، ۵، ۷ مقادیر فرعی

تساوی ۲ ماتریس: در ماتریس A و B وقتی تساوی برقرار است که از لحاظ تعداد سطر و ستون مثل هم بوده و درآیه‌ها نیز خیلی خطرناکم برابر باشد

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته تحصیلی:
نام درس: نام استاد: تاریخ آزمون:

(۳) مثال) از تساوی زیر مقادیر a، b، a' و b' را بیابید؟

$$\begin{bmatrix} a+1 & a-3 \\ b-2 & 2b+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a'-1 & a' \\ b'+2 & b'-1 \end{bmatrix}$$

حل) باید درایه‌ها نظیر به نظیر با هم برابر باشند یعنی

$$\begin{cases} a+1 = 2a'-1 \\ a-2 = a' \\ b-3 = b'+2 \\ 2b+1 = b'-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a' = a+2 \\ a' = a-2 \end{cases} \quad \begin{cases} b' = b-5 \\ b' = 2b+2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$2(a-2) = a+2$$
$$2a-4 = a+2$$
$$a = 6$$
$$a' = a-2 = 4$$
$$2b+2 = b-5$$
$$b = -7$$
$$b' = -2\times(-7)+2 = +16$$

ماتریس واحد: ماتریس مربعی را گویند که درایه‌های قطر اصلی آن مساوی ۱ و بقیه درایه‌ها مساوی صفر باشند.

$$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

جمع ماتریس‌ها: جمع ماتریس‌ها زمانی تعریف می‌شود که از لحاظ تعداد سطر و ستون هم‌نام باشند حاصل جمع ماتریس‌ها آن است که درایه‌های نظیر به نظیر با هم جمع شوند

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته تحصیلی:

نام درس: نام استاد: تاریخ آزمون:

۴

مثال) دو ماتریس زیر را با هم جمع کنید $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3 & -1\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}(2) & 3\\ 5 & -1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(3) & -1\\ 4 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 9 & 6\end{bmatrix}$$

$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}3 & 4 & 5\end{bmatrix}$

$$A+B=\begin{bmatrix}(2) & -1 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}(-3) & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

دستور جمع ماتریس ها: $[a_{ij}]_{(m\times n)}+[b_{ij}]_{(m\times n)}=[a_{ij}+b_{ij}]_{(m\times n)}$

ویژگیهای جمع ماتریس ها: ① اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه باشند داریم

این ویژگی را تعویض پذیری یا جابجایی گویند $A+B=B+A$

② اگر A یک ماتریس و $\bar{0}$ ماتریس صفر هم مرتبه با A باشد داریم

$$A+\bar{0}=\bar{0}+A$$

③ برای هر ماتریس A ماتریس $-A$ وجود دارد طوری که

$$A+(-A)=\bar{0}$$

$-A$ را قرینه ماتریس A گویند و برای هایی قرینه درایه های ماتریس A می باشد

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته تحصیلی:
نام درس: نام استاد: تاریخ آزمون:

ویژگی ۴) اگر A و B و C ماتریس‌های هم مرتبه باشند داریم

$$(A+B)+C = A+(B+C)$$

این ویژگی را شرکت پذیری ماتریس‌ها نامند

ضرب ماتریس‌ها: اگر بخواهیم عدد را در ماتریس ضرب کنیم آن عدد باید در همه درایه‌های ماتریس ضرب شود

$$2\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -5 & 11 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -10 & 22 \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 12 \end{bmatrix}$$

به طور کلی اگر بخواهیم عدد حقیقی α را در ماتریس $[a_{ij}]_{m\times n}$ آنها ضرب کنیم داریم

$$\alpha\,[a_{ij}]_{m\times n} = [\alpha a_{ij}]_{m\times n}$$

ویژگی‌های ضرب عدد در ماتریس:

۱) اگر عدد ۱ را در ماتریس A ضرب کنیم خود ماتریس A درست می‌شود $1A = A$

۲) اگر عدد α را در ماتریس A ضرب کنیم و سپس عدد β را در ماتریس حاصل ضرب کنیم ماتریسی بدست می‌آید که با حاصل ضرب $(\beta\alpha)$ در ماتریس A برابر است

$$\beta(\alpha A) = (\beta\alpha)A$$

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: | شماره دانشجویی: | رشته تحصیلی:
نام درس: | نام استاد: | تاریخ آزمون:

(۹)

(۳) اگر عدد α را در ماتریس $A_{m\times n}$ ضرب کنیم ماتریس $O_{m\times n}$ بدست می‌آید

(۴) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و α یک عدد حقیقی باشد داریم

$$\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$$

(۵) اگر α و β دو عدد حقیقی باشند و A یک ماتریس داریم

$$(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$$

مثال) قرینه ماتریس زیر را بنویسید؟

$$A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}$$

قرینه $-A=-\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -3 & 1\\ 0 & 4 & -2\end{bmatrix}$

مثال) اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}$ و $\alpha=2$، $\beta=-3$ درستی خاصیت ۲ را بررسی کنید؟

خاصیت ۲ $\quad \beta(\alpha A)=(\beta\alpha)A$

$$\alpha A=2\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 8\\ -12 & 16\end{bmatrix}$$

$$\beta(\alpha A)=-3\begin{bmatrix}4 & 8\\ -12 & 16\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12 & -24\\ 36 & -48\end{bmatrix}$$

$$\beta\alpha=-3\times 4=-12$$

$$(\beta\alpha)A=-12\begin{bmatrix}2 & 4\\ -6 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-24 & -48\\ 72 & -96\end{bmatrix}$$

پس با هم برابر بودن خاصیت برقرار است

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: شماره دانشجویی: رشته تحصیلی:
نام درس: نام استاد: تاریخ آزمون:

(۷)

مثال) اگر $\alpha = ۲$ ، $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix}$ درستی خاصیت (۴) را بررسی کنید؟

خاصیت ۴ $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

$A+B = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix}$ ست دوم

$\alpha(A+B) = ۲\begin{bmatrix} ۳ & -۳ \\ ۵ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} ۶ & -۶ \\ ۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$ *

ست اول

$\alpha A = ۲\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix}$ $\alpha B = ۲\begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix}$

$\alpha A + \alpha B = \begin{bmatrix} ۲ & -۲ \\ ۴ & ۶ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۴ & -۴ \\ ۶ & ۸ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & -۶ \\ ۱۰ & ۱۴ \end{bmatrix}$ *

پس با هم برابرند خاصیت برقرار است

مثال) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix}$ ، $\alpha = ۲$ ، $\beta = ۳$ درستی خاصیت (۵) را بررسی کنید؟ (تمرین)

$(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

ست اول

$\alpha+\beta = ۳+۲ = ۵$ $۵\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$ *

برابرند

ست دوم

$\alpha A = ۲\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴ & -۲ \\ ۰ & ۸ \end{bmatrix}$ $\beta A = ۳\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۰ & ۴ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & -۳ \\ ۰ & ۱۲ \end{bmatrix}$

$\alpha A + \beta A = \begin{bmatrix} ۱۰ & -۵ \\ ۰ & ۲۰ \end{bmatrix}$ *

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامسر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: | شماره دانشجویی: | رشته تحصیلی:
نام درس: | نام استاد: | تاریخ آزمون:

(۱)

ضرب دو ماتریس A و B را در صورتی که ضرب AB در صورت قابل انجام است که تعداد ستون‌های A با تعداد سطرهای B برابر باشد. پس می‌توان این دو ماتریس را به صورت $A_{m\times n}$ و $B_{n\times p}$ فرض کنیم که در این صورت حاصل ضرب آن‌ها یک ماتریس $m\times p$ مثل $C_{m\times p}$ می‌شود.

$$A_{m\times n}\ B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

مثال)

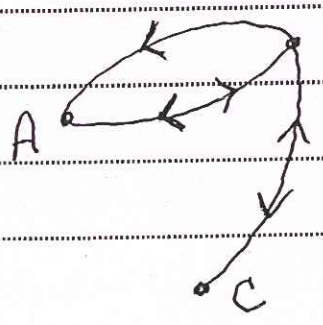
$$\underset{1\times 2}{\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}}\ \underset{2\times 1}{\begin{bmatrix}5\\4\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}(2\times 5)+(3\times 4)\end{bmatrix} = \underset{1\times 1}{\begin{bmatrix}22\end{bmatrix}}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -1\\6 & 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\times 5+2\times 6 & 1\times -1+2\times 3\\3\times 5+4\times 6 & 3\times -1+4\times 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}17 & 5\\39 & 9\end{bmatrix}$$

معرفی نمایش‌ها: برای هر گراف یک یا چند نمایش وجود دارد که می‌توان یکی از نمایش‌ها را برای نمایش گراف انتخاب کرد.

نمایش گراف به وسیله ماتریس مجاورت: این نمایش نشان دهنده تعداد مسیرهای بین هر ۲ رأس می‌باشد.

الف)



ب)

	A	B	C
A	۰	۱	۰
B	۲	۰	۱
C	۰	۱	۰

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فناوری

موسسه آموزش عالی کسری رامهر
«معاونت امور آموزشی»

نمره ورقه:
نمره میان ترم، تحقیق، پروژه:
نمره نهایی به عدد:
نمره نهایی به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

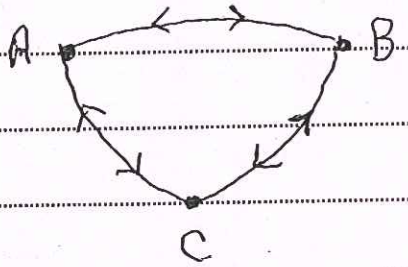
نمره تجدید نظر
نمره تجدید نظر به عدد:
نمره تجدید به حروف:
تاریخ و امضاء استاد

نام و نام خانوادگی: | شماره دانشجویی: | رشته تحصیلی:

نام درس: | نام استاد: | تاریخ آزمون:

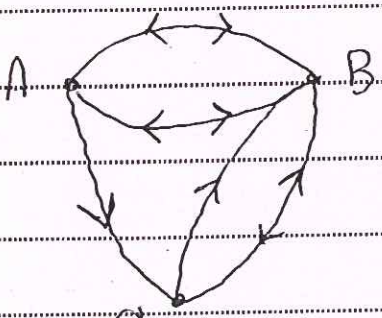
(۹)

سوال) ماتریس متناظر شبکه زیر را رسم نمایید؟



	A	B	C
A	۰	۱	۱
B	۱	۰	۱
C	۱	۱	۰

تمرین



	A	B	C
A	۰	۲	۱
B	۲	۰	۱
C	۱	۱	۰

دترمینان ماتریس: به هر ماتریس مربع با درایه‌های عدد حقیقی تنها یک عدد حقیقی را دترمینان آن ماتریس می‌نامند. دترمینان ماتریس A را با |A| یا detA نشان می‌دهند

دترمینان ماتریس‌های ۱×۱ و ۲×۲ به صورت زیر است

$$\det[a] = a$$

$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

مثال) دترمینان ماتریس‌های زیر را بیابید!

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{vmatrix} = -۱ - ۶ = -۷$$

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{vmatrix} = ۴ - ۴ = ۰$$

$$\begin{vmatrix} m+۱ & m-۱ \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix} = ۳(m+۱) - ۲(m-۱) = m + ۵$$

دستگاه معادلات خطی: به دستگاه‌های n معادله، n مجهولی دستگاه گفته می‌شود که کلی‌ترین دستگاه‌ها، دستگاه‌های درجه اول در حالت کلی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

حل دستگاه با استفاده از ماتریس‌ها:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$$

با فرض اینکه $A = \begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}$ دستگاه به صورت زیر نوشته می‌شود

$$AX = B$$

اگر طرفین این تساوی را در A^{-1} ضرب کنیم داریم

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \longrightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

طبق نتیجه فوق کافی است وارون ماتریس A را پیدا کرده در B ضرب کنیم تا X به دست آید