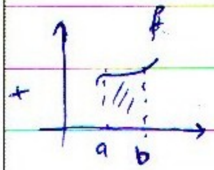
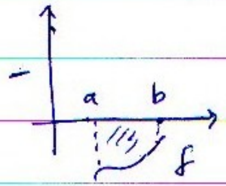
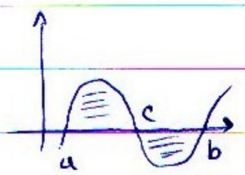
کاربرد انتگرال معین در محاسبه مساحت:

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$



$$S=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\left|\int_c^b f(x)\,dx\right|$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x)=x^2-4x$ محور xها و در بازه $[0,4]$ را بیابید.

$$S=\left|\int_0^4 x^2-4x\,dx\right| \qquad x^2-4x=0 \quad x(x-4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

چون بین ۰ تا ۴ عددی یافت نشد که x را قطع کرده باشد از راه اول عمل می‌کنیم

$$=\int x^2-4x\,dx=\frac{1}{3}x^3-4\left(\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{3}x^3-2x^2$$

$$=\int_0^4 x^2-4x\,dx=\left(\frac{1}{3}(4)^3-2(4)^2\right)-\left(\frac{1}{3}(0)-2(0)\right)=\frac{64}{3}-32=\frac{32}{3}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x)=x^3-4x$ محور xها و در بازه $[-2,2]$ را بیابید.

$$x^3-4x=x(x^2-4)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2-4=0 \begin{cases} x=-2 \\ x=+2 \end{cases} \end{cases}$$

$-2 \quad 0 \quad 2$

$$S=\left|\int_{-2}^0 x^3-4x\,dx\right|+\left|\int_0^2 x^3-4x\,dx\right| \Rightarrow \int x^3-4x\,dx=\frac{1}{4}x^4-2x^2$$

$$\begin{cases} \int_{-2}^0 x^3-4x\,dx=(0)-\left(\frac{1}{4}(-2)^4-2(-2)^2\right)=4 \\ \int_0^2 x^3-4x\,dx=\left(\frac{1}{4}(2)^4-2(2)^2\right)-(0)=-4 \end{cases}$$

$$\boxed{S=|4|+|-4|=8}$$

مثال: مساحت ناحیه محدود به نمودار $f(x)=-x^3+x^2+2x$ محور xها و در بازه $[-1,1]$ را بیابید.

$$x(-x^2+x+2) \begin{cases} x=0 \\ -x^2+x+2=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases} \end{cases}$$

$-1 \quad 0 \quad 1$

$$\left|\int_{-1}^0 -x^3+x^2+2x\,dx\right|+\left|\int_0^1 -x^3+x^2+2x\,dx\right|=\left|\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right)_{-1}^{0}\right|+\left|\left(-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+x^2\right)_0^1\right|$$

جواب آخر $\frac{3}{2}$ می‌گردد.

توابع چند متغیره:

$f: R \to R$
$f(x) = x^2$
$f(1) = 1$
$f(2) = 4$

$F: R^2 \to R$
$f(x,y) = x+y$
$f(1,2) = 3$
$f(2,-5) = -3$

$F: R^3 \to R$
$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$
$f(1,2,3) = (1)^2+(2)^2+(3)^2 = 14$
$f(0,1,-1) = 0+1+1 = 2$

مشتق توابع چند متغیره:

الف) مشتق جزئی:

$f(x,y) = 2x^2+3y$

مشتق جزئی مرتبه اول f نسبت به x $f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 4x+0$ در این حالت y را عدد ثابت در نظر میگیریم

مشتق جزئی مرتبه اول f نسبت به y $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0+3$ در این حالت x را عدد ثابت در نظر میگیریم.

فرمول مورد استفاده:

$$\boxed{\begin{aligned} c' &= 0 \\ (cf)' &= cf' \end{aligned}}$$

$f(x,y,z) = x^3+\sin y+3z^5$
$f_x = 3x^2+0+0$
$f_y = 0+\cos y+0$
$f_z = 0+0+15z^4$

$f(x,y) = x^2y^2+3xy+7x$
$f_x = y^2(2x)+3y(1)+7$
$f_y = x^2(2y)+3x(1)+0$

$f(x,y,z) = x^2\cos z - z\sin y$
$f_x = \cos z(2x)+0$
$f_y = 0+0-z(\cos y)$
$f_z = x^2(-\sin z)-(\sin y)(1)$

تمرین مشتقات جزئی مرتبه اول توابع زیر را بیابید:

$f(x,y) = x^2+\ln(xy)$
$f_x = 2x+\frac{y}{xy}$
$f_y = \frac{x}{xy}$

$f(x,y) = e^{4x^2-5y}+\sin x$
$f_x = 8xe^{4x^2-5y}+\cos x$
$f_y = -5e^{4x^2-5y}$

$f(x,y,z) = \sin(xy)+\cos z$
$f_x = y.\cos(xy)$
$f_y = x.\cos(xy)$
$f_z = -\sin z$

مشتقات جزئی مراتب بالاتر :

$$f(x,y) = x^2 + y^3 + xy$$

مرتبه اول $f_x = 2x + y \to f_{xx} = 2$ ، $f_{xy} = 1$ مرتبه دوم

$f_y = 3y^2 + x \to f_{yy} = 6y$ ، $f_{yx} = 1$

مشتقات جزئی مرتبه دوم

مثال مشتقات جزئی مرتبه دوم تابع فوق را بدست آورید ؟ $f(x,y) = ye^x + xe^y$

$f_x = ye^x + e^y \to f_{xx} = ye^x$ ، $f_{xy} = e^x + e^y$

$f_y = e^x + xe^y \to f_{yy} = xe^y$ ، $f_{yx} = e^x + e^y$

$$f(x,y,z) = \cos(xy) + \sin z$$

$f_x = y(-\sin xy)$ شبیه ضرب $\to f_{xx} = y(-y\cos xy)$

$f_{xy} = (-\sin xy) + y(-x\cos xy)$

$f_{xz} = 0$

$f_y = x(-\sin xy) \to f_{yy} = x(-x\cos xy)$

$f_{yx} = (-\sin xy) + x(-y\cos xy)$ 　　 $f_{yz} = 0$

$f_z = \cos z \to f_{zz} = -\sin z$

$f_{zx} = 0$ 　　 $f_{zy} = 0$

$f(x,y) = xy + y\ln(xy) \to f_x = y + y\left(\frac{y}{xy}\right) = y + \frac{y}{x}$ مرتبه اول

$f_{xx} = \frac{0(x) - (1)y}{x^2} = \frac{-y}{x^2}$

$f_{xy} = 1 + \frac{1}{x}$ 　 مرتبه دوم

$f_y = x + y\left(\frac{x}{xy}\right) + \ln(xy) = x + \ln(x.y) + 1 \to f_{yy} = \frac{x}{xy} = \frac{1}{y}$

$f_{yx} = 1 + \frac{y}{xy} = 1 + \frac{1}{x}$

مثال اگر $f(xy) = xy + y\ln(xy)$ نشان دهید که $xf_{xx} + yf_{yx} = y^2 f_{yy}$

طرف اول $x\left(\frac{-y}{x^2}\right) + y\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{-y}{x} + y + \frac{y}{x} = \boxed{y}$

طرف دوم $y^2\left(\frac{1}{y}\right) = \boxed{y}$

مثال اگر $f(x,y)=xy+xe^{\frac{1}{y}}$ نشان دهید که $f_{xy}=f_{yx}$

$$f_x = y+e^{\frac{1}{y}} \rightarrow f_{xx}=0 \rightarrow f_{xy}=1+\frac{-y}{y^2}e^{\frac{1}{y}}$$

از فرمول ضرب استفاده میکنیم

$$f_y = x+\frac{-xy}{y^2}(e^{\frac{1}{y}}) \rightarrow f_{yy} = -x\left(\frac{-y}{y^2}\right)(e^{\frac{1}{y}})+\left(\frac{-x}{y^2}\right)\left(\frac{-1}{y^2}e^{\frac{1}{y}}\right) \rightarrow f_{yx}=-\frac{e^{\frac{1}{y}}}{y}$$

دیفرانسیل کل:

فرض کنید f یک تابع ۲ متغیره باشد $df=f_x\,dx+f_y\,dy$

" " ۳ " " " " $df=f_x\,dx+f_y\,dy+f_z\,dz$

مثال اگر $f(x,y)=x+\ln(x^2+y^2)$ دیفرانسیل کل تابع f را به ازای $x=2$ ، $y=3$ ، $dx=1$ ، $dy=-1$

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy$$

$$=\left(1+\frac{2x}{x^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)dy=\left(1+\frac{4}{4+9}\right)(1)+\left(\frac{6}{4+9}\right)(-1)=\frac{17}{13}-\frac{6}{13}=\frac{11}{13}$$

مثال دیفرانسیل کل توابع زیر را بدست آورید:

الف) $f(x,y)=x^2-4xy^2+5x$

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy=(2x-4y^2+5)dx+(-8xy)dy$$

ب) $f(x,y,z)=e^{xyz}+\sin(xy)$

$$=\left((yze^{xyz})+y(\cos(xy))\right)dx+\left((xze^{xyz})+x(\cos(xy))\right)dy+(xye^{xyz})dz$$

مثال دیفرانسیل کل تابع زیر را بدست آورید: $f(x,y,z)=e^{z}\sin(xy-yz)$

$$df=f_x\,dx+f_y\,dy+f_z\,dz$$

مشتق ضرب عمل میکنیم

$$=e^{z}\cdot y(\cos(xy-yz))dx+e^{z}(x-z)\cos(xy-yz)dy+e^{z}\cdot\sin(xy-yz)+e^{z}(-y)\cos(xy-yz)$$

مشتق کل: فرض کنید f تابع ۳ متغیره بر حسب x , y , z باشد

از طرفی x , y , z نیز خود توابعی بر حسب t هستند

$$\frac{df}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}+f_z\frac{dz}{dt}$$

مشتق کل تابع زیر را بدست آورید $f(x,y,z)=xy+yz+xz$ برای $x=e^{t}$ $y=\cos t$

$z=\sin t$

$$\left.\begin{array}{l} x=e^{t} \rightarrow \dfrac{dx}{dt}=e^{t} \\ y=\cos t \rightarrow \dfrac{dy}{dt}=-\sin t \\ z=\sin t \rightarrow \dfrac{dz}{dt}=\cos t \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{df}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}+f_z\frac{dz}{dt}$$

$$\Rightarrow (y+z)(e^{t})+(x+z)(-\sin t)+(y+x)\cos t$$

$$\Rightarrow (\cos t+\sin t)(e^{t})+(e^{t}+\sin t)(-\sin t)+(\cos t+e^{t})\cos t$$ مقدار ها را برحسب t از نوشت

مشتق این تابع $f(x,y)=\ln(2x^2+y^3)$ بشرط $x=e^{2t}$ ، $y=t^{\frac{2}{3}}$ بدست آورید:

$$\left.\begin{array}{l} x=e^{2t} \rightarrow \dfrac{dx}{dt}=2e^{2t} \\ y=t^{\frac{2}{3}} \rightarrow \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}} \end{array}\right\} \frac{df}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}=$$

$$=\left(\frac{4x}{2x^2+y^3}\right)(2e^{2t})+\left(\frac{3y^2}{2x^2+y^3}\right)\left(\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}\right)$$

مشتق این تابع $f(x,y)=x+4x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}-3y$ بشرط $x=t^2$ ، $y=\frac{1}{t}$ بدست آورید:

$$x=t^2 \rightarrow \frac{dx}{dt}=2t \quad , \quad y=\frac{1}{t} \rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-1}{t^2}$$

$$\frac{df}{dt}=f_x\frac{dx}{dt}+f_y\frac{dy}{dt}=\left(1+(2x^{-\frac{1}{2}})y^{\frac{1}{2}}\right)dx+\left(\frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}\right)4x^{\frac{1}{2}}-3)\left(\frac{-1}{t^2}\right)$$

قاعده زنجیره‌ای برای تابع چند متغیره: $f(x,y)=x^2+3y^2$

اگر $x=2r-3s$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dr}=2 \\ \dfrac{dx}{ds}=-3 \end{cases}$ $\quad y=r^2-s^2$ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dr}=2r \\ \dfrac{dy}{ds}=-2s \end{cases}$

$$\frac{df}{dr}=f_x\frac{dx}{dr}+f_y\frac{dy}{dr}=(2x)(2)+(6y)(2r)$$

$$\frac{df}{ds}=f_x\frac{dx}{ds}+f_y\frac{dy}{ds}=(2x)(-3)+(6y)(-2s)$$

مثال: $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$ بشرط $y=r-s$ ، $x=r+s$ $\quad z=rs$

$x=r+s$ $\begin{cases} \dfrac{dx}{dr}=1 \\ \dfrac{dx}{ds}=1 \end{cases}$ $\quad y=r-s$ $\begin{cases} \dfrac{dy}{dr}=1 \\ \dfrac{dy}{ds}=-1 \end{cases}$ $\quad z=rs$ $\begin{cases} \dfrac{dz}{dr}=s \\ \dfrac{dz}{ds}=r \end{cases}$

$$\frac{df}{dr}=f_x\frac{dx}{dr}+f_y\frac{dy}{dr}+f_z\frac{dz}{dr}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}(1)+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}(1)+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}(s)$$

$$\frac{df}{ds}=f_x\frac{dx}{ds}+f_y\frac{dy}{ds}+f_z\frac{dz}{ds}=\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}(1)+\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}(-1)+\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}(r)$$

مثال: $f(x,y)=x\ln y+y\ln x \qquad x=e^{r+s} \qquad y=e^{r-s}$

$$x=e^{r+s}\longrightarrow \frac{dx}{dr}=e^{r+s},\quad \frac{dx}{ds}=e^{r+s} \qquad\qquad y=e^{r-s}\longrightarrow \frac{dy}{dr}=e^{r-s},\quad \frac{dy}{ds}=-e^{r-s}$$

$$\frac{df}{dr}=f_x\frac{dx}{dr}+f_y\frac{dy}{dr}=\left(\ln y+\frac{y}{x}\right)e^{r+s}+\left(\frac{x}{y}+\ln x\right)e^{r-s}$$

$$\frac{df}{ds}=f_x\frac{dx}{ds}+f_y\frac{dy}{ds}=\left(\ln y+\frac{y}{x}\right)e^{r+s}+\left(\frac{x}{y}+\ln x\right)(-e^{r-s})$$

مثال: $f(x,y,z)=xy+yz$ با شرط $x=2r \quad y=rs^2 \quad z=2sr$

$x=2r\longrightarrow \frac{dx}{dr}=2,\quad \frac{dx}{ds}=0$

$y=rs^2\longrightarrow \frac{dy}{dr}=s^2,\quad \frac{dy}{ds}=2sr$

$z=2sr\longrightarrow \frac{dz}{dr}=2s,\quad \frac{dz}{ds}=2r$

$$\begin{cases}f_x=y\\ f_y=x+z\\ f_z=y\end{cases}$$

$$\frac{df}{dr}=f_x\frac{dx}{dr}+f_y\frac{dy}{dr}+f_z\frac{dz}{dr}=y(2)+(x+z)(s^2)+y(2s)$$

$$\frac{df}{ds}=f_x\frac{dx}{ds}+f_y\frac{dy}{ds}+f_z\frac{dz}{ds}=y(0)+(x+z)(2sr)+y(2r)$$

مشتق ضمنی

$F(x,y,z)=0$ مشتق y نسبت به x: $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_y}$

مشتق x نسبت به y: $\dfrac{dx}{dy}=-\dfrac{F_y}{F_x}$ مشتق z نسبت به x: $\dfrac{dz}{dx}=-\dfrac{F_x}{F_z}$

مثال: $x\ln y+e^{3x}\cos y+e^{2y}\sin x=1$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{\ln y+3e^{3x}\cos y+2e^{2y}\cos x}{x\left(\frac{1}{y}\right)+e^{3x}(-\sin y)+2e^{2y}\cdot\sin x}$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{F_y}{F_x}=-\frac{x\left(\frac{1}{y}\right)+e^{3x}(-\sin y)+2e^{2y}\cdot\sin x}{\ln y+3e^{3x}\cos y+2e^{2y}\cos x}$$

مثال: $f(x,y,z) = xz^2 + yx^2 + zy^2 - 2xyz$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{z^2 + 2xy + 0 - 2yz}{2xz + 0 + y^2 - 2xy}$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{f_y}{f_x} = -\frac{x^2 + 2zy - 2xz}{z^2 + 2xy + 0 - 2yz}$$

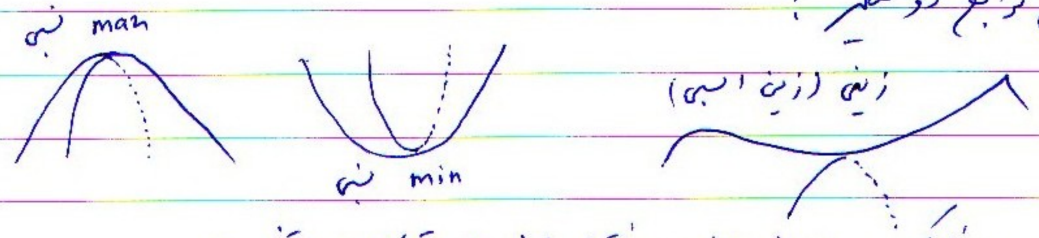
مثال: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + (2x+3y+z)^3 = 0$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{f_x}{f_z} = -\frac{-\frac{1}{x^2} + 3(2x+3y+z)^2(2)}{-\frac{1}{z^2} + 3(2x+3y+z)^2(1)}$$

$$(f^n)' = n f^{n-1} f'$$

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{f_y}{f_z} = -\frac{-\frac{1}{y^2} + 3(2x+3y+z)^2(3)}{-\frac{1}{z^2} + 3(2x+3y+z)^2(1)}$$

ماکسیمم و مینیمم توابع دو متغیر:



روش بدست آوردن ماکسیمم و مینیمم نسبی و نقطه زینی برای توابع دو متغیر:

مرحله اول: بدست آوردن نقاط بحرانی

$f_x = 0$
$f_y = 0$ $\rightarrow (a,b)$ نقاط بدست می‌آید

مرحله دوم: $\Delta(a,b) = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2$ دلتا

$\Delta > 0$:
- $f_{xx} > 0 \longrightarrow$ (a,b) نقطه مینیمم نسبی است
- $f_{xx} < 0 \longrightarrow$ (a,b) نقطه ماکسیمم نسبی است

$\Delta < 0 \longrightarrow$ (a,b) نقطه زینی است

مثال: نقاط ماکسیمم و مینیمم و زینی تابع زیر را در صورت وجود بدست آورید؟

$f(x,y) = x^2 - y^2 + 1$ $\begin{cases} f_x = 2x = 0 \longrightarrow x = 0 \\ f_y = -2y = 0 \longrightarrow y = 0 \end{cases}$ $(0,0)$ نقطه بحرانی

مرحله اول

مرحله دوم

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}=2 \\ f_{xy}=0 \\ f_{yy}=-2 \end{array}\right\} \Delta(0,0)=f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2=(2)(-2)-(0)=-4<0 \rightarrow$$ (۰,۰) نقطه زینی است

مثال: نقاط ماکسیمم و مینیمم و زینی تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x,y)=x^2+xy+y^2-6x+2 \quad \begin{cases} f_x=2x+y-6=0 \rightarrow 2(-2y)+y-6=0 \rightarrow \boxed{y=-2} \\ f_y=x+2y=0 \rightarrow x=-2y \rightarrow x+2(-2)=0 \rightarrow \boxed{x=4} \end{cases}$$ نقطه بحرانی

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}=2 \\ f_{xy}=1 \\ f_{yy}=2 \end{array}\right\} \Delta(4,-2)=f_{xx}\cdot f_{yy}-(f_{xy})^2=(2)(2)-(1)^2=3>0$$

$f_{xx}=2>0 \Rightarrow$ مینیمم نسبی است $(4,-2)$

مثال: نقاط ماکسیمم و مینیمم و زینی تابع زیر را بدست آورید:

$$f(x,y)=x^2+y^3-4xy-11y$$

$$\begin{cases} f_x=2x-4y=0 \longrightarrow \boxed{x=+2y} \\ f_y=3y^2-4x-11=0 \longrightarrow 3y^2-4(2y)-11=0 \quad 3y^2-8y-11=0 \end{cases}$$

$$\Delta=b^2-4ac=64-4(3)(-11)=64+132=196$$

$$y=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{8\pm 14}{2(3)}= \begin{cases} y=\frac{8+14}{6}=\frac{22}{6}=\frac{11}{3} \Rightarrow x=2\left(\frac{11}{3}\right)=\frac{22}{3} \\ y=\frac{8-14}{6}=\frac{-6}{6}=-1 \quad x=-2 \end{cases}$$

$\left(\frac{22}{3},\frac{11}{3}\right),(-2,-1)$ نقاط بحرانی

$$\left.\begin{array}{l} f_{xx}=2 \\ f_{xy}=-4 \\ f_{yy}=6y \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Delta(-2,-1)=(2)(6y)-(-4)^2=-12-16=-28<0 \quad \text{زینی است } (-2,-1) \\ \Delta\left(\frac{22}{3},\frac{11}{3}\right)=(2)(6y)-(-4)^2=(2)\left(6\times\frac{11}{3}\right)-16=44-16=28>0 \\ f_{xx}=2>0 \Rightarrow \text{مینیمم نسبی است } \left(\frac{22}{3},\frac{11}{3}\right) \end{array}$$

مثال: تمرین فرض کنید تابع هزینه کل یک موسسه که ۲ نوع کالا تولید می کند به صورت

الف) $TC(x,y)=2x^3-6xy+y^2+500$

که در آن x و y به ترتیب تعداد تولید روزانه این دو کالا است؛ میزان تولید روزانه این موسسه را از دو نوع کالای تولیدی طوری تعیین کنید که هزینه کل مینیمم باشد.

ب) $f(x,y)=x^3-3xy+y^3$

$$\begin{cases} f_x=3x^2-3y=0 \rightarrow y=x^2 \\ f_y=-3x+3y^2=0 \rightarrow -3x+3(x^2)^2=0 \rightarrow 3x^4-3x=0 \end{cases}$$

$$3x(x^3-1)=0 \rightarrow \boxed{x=0}, \quad x^3-1=0 \ \boxed{x=1}$$

$$\begin{cases} x=0 \rightarrow y=(0)^2 \rightarrow y=0 \\ x=1 \rightarrow y=(1)^2 \rightarrow y=1 \end{cases}$$

$(0,0)\ ,\ (1,1)$ نقاط بحرانی

$\Delta(1,1) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6\times1)(6\times1) - (9) = 36 - 9 = 27 > 0$ چون f_{xx} مثبت است min نسبی است

$\Delta(0,0) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (6\times0)(6\times0) - 9 = -9 < 0$ نقطه زینی است

جواب الف)

$TC(x,y) = 2x^3 - 6xy + y^2 + 8x$

$$\begin{cases} f_x = 6x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x + 2y = 0 \rightarrow -6x = -2y \Rightarrow y = 3x \end{cases}$$

$6x^2 - 6(3x) = 0 \quad 6x(x-3) = 0 \rightarrow \boxed{x=0}, \quad x-3=0 \rightarrow \boxed{x=3}$

$x = 0 \rightarrow y = 3(0) \rightarrow y = 0 \quad (0,0)$

$x = 3 \rightarrow y = 3(3) \rightarrow y = 9 \quad (3,9)$

نقاط بحرانی

$f_{xx} = 12x \quad \Delta(0,0) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (0\times2) - (-6)^2 = -36 < 0$ زینی است

$f_{xy} = -6 \quad \Delta(3,9) = f_{xx}\cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 = (36\times2) - (-6^2) = 36 > 0$ چون f_{xx} مثبت است min نسبی است

$f_{yy} = 2$

ماتریس: شکلی از اعداد است که در چند سطر و ستون نوشته می‌شود

ماتریس‌ها را با حروف بزرگ به صورت $A_{m\times n}$ نشان می‌دهند که در آنها m تعداد سطرها و n تعداد ستون‌ها است. اعدادی که در ماتریس قرار می‌گیرند را درایه یا عضو ماتریس می‌گویند درایه‌ها را معمولاً با حروف کوچک به صورت a_{ij} نشان می‌دهیم.

شماره سطر ← i ، j → شماره ستون

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_{3\times2} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 6 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

$a_{11} = 2 \quad a_{21} = 0$

$a_{22} = 1 \quad a_{12} = 0$

معرفی چند ماتریس خاص:

۱- ماتریس مربع: ماتریسی که تعداد سطرها و ستونها برابر باشد

$A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ قطر اصلی $\qquad A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ قطر اصلی، قطر فرعی

۲- ماتریس قطری: ماتریس مربعی است که درایه‌ها بجز قطر اصلی صفر باشند

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

۳- ماتریس همانی: ماتریس مربعی که درایه‌های روی قطر اصلی همه ۱ و بقیه صفر باشند

ماتریس $n\times n$ را با I_n نشان می‌دهیم.

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۴- ماتریس بالا مثلثی:

ماتریس مربعی که درایه‌های زیر قطر اصلی آن صفرند

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۵- ماتریس پایین مثلثی: ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفرند

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ترانهاده: اگر در ماتریس A جای سطرها و ستون‌های آن را با هم عوض کنیم ماتریسی بدست می‌آید که به آن ترانهاده A می‌گویند و با A^T نشان می‌دهیم.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \quad A^T = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

۶- ماتریس متقارن: اگر در ماتریس مربع A داشته باشیم $A^T = A$ آنگاه A متقارن است.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 7 \\ -4 & -7 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & -7 \\ 4 & 7 & 0 \end{bmatrix}$$

اعمال جبری روی ماتریس‌ها:

الف) جمع و تفاضل دو ماتریس

$$A_{m\times n} + B_{m\times n} = C_{m\times n}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 2 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 5 \\ 13 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} =$$ جمع نمی‌شوند

ب) ضرب اسکالر (عدد حقیقی) در ماتریس:

$$2\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}$$

ج) ضرب ماتریس‌ها:

$$A_{m\times n} \times B_{n\times p} = C_{m\times p}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times3+1\times1 & 2\times0+1\times5 \\ 3\times3+2\times1 & 3\times0+2\times5 \\ 4\times3+7\times1 & 4\times0+7\times5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 11 & 10 \\ 19 & 35 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\times(-4)+2\times1+1\times(-2) & -1\times(-2)+2\times(-1)+1\times4 \\ 4\times(-4)+0\times1+2\times(-2) & 4\times(-2)+0\times-1+2\times4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \\ -20 & \end{bmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -6 & -7 \\ -4 & 2 & -1 \\ 14 & -4 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال: از رابطه زیر ماتریس A را بیابید.

$$2A - \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 10 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 5 & \frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

مثال از رابطه زیر ماتریس A را بیابید.

$$4\left(A + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}\right) = 2A + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow 2A + \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2A = \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 12 \\ 20 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ -14 & -14 \end{bmatrix} \rightarrow A = \begin{bmatrix} \frac{-7}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{-14}{2} & -7 \end{bmatrix}$$

تمرین اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$$(AB)^T = \left(\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 9+2 & 21+5 \\ 18+0 & 42+0 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 11 & 18 \\ 26 & 42 \end{bmatrix}$$

$$(BC)^T = \left(\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^T = \left(\begin{bmatrix} 14 & 24 \\ 10 & 17 \end{bmatrix}\right)^T = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$$

$$C^T B^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 10 \\ 24 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A(B+C)=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}3&7\\2&5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3&1\\6&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&8\\4&8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13&32\\18&48\end{bmatrix}$$

تمرین: حاصل ضرب‌های زیر را بدست آورید.

$$\begin{bmatrix}3&1\\2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&6\\10&14\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+6&5+6&5+6\\10+14&10+14&10+14\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}3&2\\6&5\\7&4\end{bmatrix}\cdot I_2=\begin{bmatrix}3&2\\6&5\\7&4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&6&7\\2&5&4\end{bmatrix}$$

دترمینان:

به هر ماتریس مربع عددی به نام دترمینان نسبت داده می‌شود. از دترمینان در حل بسیاری از مسایل کاربردی از جمله حل دستگاه‌های معادلات استفاده می‌شود.

محاسبه دترمینان ماتریس ۲×۲:

$$A=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$$

دترمینان $A = |A| = \det A = ad-bc$

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}3&5\\1&6\end{bmatrix}\rightarrow |A|=18-5=13 \qquad B=\begin{bmatrix}-3&4\\-2&1\end{bmatrix}\quad |B|=-3-(-8)=5$$

برای محاسبه دترمینان ماتریس‌های ۳×۳ به بالا به تعریف زیر نیاز داریم

همسازه: فرض کنید A یک ماتریس مربع $n\times n$ است
همسازه A_{ij} از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

M_{ij} ماتریسی است که از حذف سطر i و ستون j ، A بدست آمده است.

مثال:

$$A=\begin{bmatrix}5&2&4\\3&-1&0\\2&1&3\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1&0\\1&3\end{vmatrix}=-3-0=-3$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}3&0\\2&3\end{vmatrix}=-(9-0)=-9$$

سطر ۳ ستون ۲ $\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}5&4\\3&0\end{vmatrix}=-(0-12)=12$

روش بسط دترمینان برای محاسبه دترمینان ماتریس $A_{n\times n}$

یک سطر ماتریس A را انتخاب می‌کنیم. مثلاً سطر i ام:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

مثال: دترمینان ماتریس A را بدست آورید

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

مثلاً سطر ۱ را انتخاب بکنیم

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}$$

$$|A| = 4(-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1(-1)^3 \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 4(6-0) - (9-0) + 2(6-10) =$$
$$24 - 9 - 8 = 7$$

$$|A| = 3(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 2(-1)^4 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + 0 = -3(3-4) + 2(12-10) = 3 + 4 = 7$$

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad |A| = 4(-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + 5(-1)^3 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + 1(-1)^4 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$4(3-2) + (-5)(7-6) + (-7-(-9)) = 4 - 5 + 2 = 1$$

خواص دترمینان:

۱- دترمینان ماتریس قطری یا مثلثی برابر است با حاصلضرب درایه‌های قطر اصلی

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 48$$

نتیجه: دترمینان ماتریس همانی I_n برابر است با ۱

$$|I_n| = 1$$

۲- دترمینان ماتریسی که تمام درایه‌های یک سطر یا ستون آن صفر است برابر صفر می‌باشد.

۳- دترمینان ماتریسی که دو سطر برابر یا دو ستون برابر داشته باشد برابر صفر است.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

چون دو سطر آن برابر است

۴- اگر تمام درایه‌های یک سطر یا ستون ماتریس مثل A در یک عدد ثابت مثل ۲ ضرب شده باشد دترمینان ماتریس حاصل برابر است با $2|A|$.

$$\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 6 & 12 & 4 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 5 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

از دو فاکتور گرفتیم — عدد ۲ فاکتور — دترمینان آن مساوی ۰

۵- دترمینان ماتریس حاصل از مجموع مضرب اسکالری (عدد حقیقی) از یک سطر (ستون) با یک سطر (ستون) دیگر ماتریس A برابر است با دترمینان A.

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{سطر یک + سطر دو نتیجه در سطر دو}]{R_1+R_2 \to R_2} \begin{vmatrix} a & b & c \\ a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c) \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

دو ستون برابر است

مثال/

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{vmatrix} \begin{matrix} -R_1+R_2 \to R_2 \\ = \\ -R_3+R_4 \to R_4 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

راه دیگر می‌شود سطر اول و آخر را باهم جمع کرد و سطر دوم و سوم را باهم

۶- دترمینان ماتریس مربع A با دترمینان A^T برابر است (ترانهاده)

۷- اگر جای دو سطر یا ستون ماتریس A را عوض کنیم دترمینان ماتریس حاصل منفی می‌شود

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$$

وارون (معکوس) ماتریس A:

اگر برای ماتریس مربع $A_{n\times n}$ ماتریس مربع $B_{n\times n}$ موجود باشد بطوریکه $AB=BA=I_n$ آنگاه B را وارون A نامیده و معمولاً با A^{-1} نشان می‌دهیم.

- چه ماتریس‌هایی دارای وارون هستند:

$|A| \neq 0 \longrightarrow$ (A نامنفرد است) پس A وارون پذیر است

$|A| = 0 \longrightarrow$ (A منفرد است) " " " " نیست

روش بدست آوردن وارون ماتریس $A_{n\times n}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال : وارون A را درصورت وجود بیابید :

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

اول دترمینان را بدست می آوریم

$$|A| = 0 + 4(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} + 5(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -28+5=-23 \neq 0$$

وارون پذیر است

حال برای بدست آوردن وارون باید تمام همسازه‌های ماتریس A را بدست آورد

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-17 \quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=5 \quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=14$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=10 \quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=-7 \quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}=-15$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-8 \quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1 \quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=12$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{-23}\begin{bmatrix} -17 & 5 & 14 \\ 10 & -7 & -15 \\ -8 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$