# مختصات قطبی و اعداد مختلط

## ۱ مختصات قطبی

تاکنون برای نمایش نقاط صفحه از دستگاه مختصات دکارتی (قائم) استفاده می‌کردیم. این دستگاه از دو محور عمود بر هم (محور $x$ ها و محور $y$ ها) تشکیل شده است. به ازای هر نقطه، یک زوج مرتب که مؤلفهٔ اول آن فاصلهٔ تصویرِ نقطه روی محور $x$ ها تا مبدأ و مؤلفهٔ دوم آن فاصلهٔ تصویرِ نقطه روی محور $y$ ها تا مبدأ است نظیر می‌شود. از این دستگاه برای مصارف مختلف، نظیر رسم نمودار توابع استفاده می‌شود.

در این بخش قصد داریم دستگاه مختصات دیگری به نام دستگاه مختصات قطبی را برای نمایش نقاطِ صفحه تعریف کنیم. علت تعریف این دستگاه مختصات آن است که گاهی موارد کارکردن با مختصات دکارتی به عبارات پیچیده‌ای منجر می‌شود ولی اگر آنها را به مختصات قطبی تبدیل کنیم، به عبارتهای ساده‌ای منجر می‌شود. به طور مشخص از این دستگاه در مبحث اعداد مختلط و انتگرالهای مضاعف استفاده خواهیم کرد.

فرض کنیم $L$ یک نیم خط ثابت جهتدار به نام محور قطبی باشد که از نقطهٔ ثابت $O$ به نام مبدأ یا قطب خارج شده است. اگر $P$ یک نقطه در صفحه باشد، مختصات قطبی $P$ را با دو مؤلفهٔ $r$ و $\theta$ نمایش می‌دهیم که در آن $r$ فاصلهٔ $P$ تا قطب و $\theta$ زاویهٔ بین $L$ و پاره‌خطِ $OP$ است که از $L$ به $OP$ در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت (جهت مثبت مثلثاتی) سنجیده می‌شود. $r$ را مختص شعاعی و $\theta$ را مختص زاویه‌ای $P$ می‌نامند. با تعریف فوق $r$ باید مثبت باشد. اگر $r$ یک عدد حقیقی منفی باشد، نقطهٔ $(r,\theta)$ را قرینهٔ $(|r|,\theta)$ نسبت به قطب تعریف می‌کنیم. به عبارت دیگر: $(r,\theta)=(-r,\theta+\pi)$. در عبارت فوق منظور از تساوی، یکسان بودن نقاط با این دو مختصات قطبی است. همچنین منظور از مقدار منفیِ $\theta$، حرکت در خلاف جهت مثبت مثلثاتی است.

**مثال ۱٫۱ .** *نقطهٔ $P(۱,\pi/۴)$ و $Q(-۲,\pi/۳)$ را در صفحه مشخص کنید.*

**حل.** نقطهٔ $P$ در شکلِ ۱ (الف) نمایش داده شده است. در مورد نقطهٔ $Q$ به علت منفی بودن $r$ ابتدا داریم $Q=(-۲,\pi/۳)=(۲,\pi+\pi/۳)$. حال به راحتی می‌توان نقطه را در دستگاه مختصات قطبی نشان داد. □

به ازای هر زوج مرتب $(r,\theta)$ فقط یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود اما عکس این مطلب درست نیست. یعنی یک نقطه در صفحه دارای مختصات قطبی متعدد است. در واقع اگر $P(r,\theta)$ نقطه ای غیر از قطب باشد آنگاه $(r,\theta+۲n\pi)\quad(n\in\mathbb{Z})$ نیز نمایش قطبی $P$ است. قطب، با هر زوج مرتب به صورت $(۰,\theta)$ صرفنظر از مقدار $\theta$ نمایش داده می‌شود. بنابراین بین نقاط صفحه و مختصات قطبی آنها تناظر یک به یک برقرار نیست اما در مختصات دکارتی این تناظر یک به یک برقرار می‌باشد.

### ۱.۱ تبدیل مختصات قطبی به دکارتی و برعکس

اغلب مختصات دکارتی و قطبی با هم به کار می‌روند. به این ترتیب که قطب و محور قطبی را به ترتیب روی مبدأ و محور $x$ مثبت دستگاه مختصات دکارتی قرار می‌دهیم. در این صورت هر نقطه در صفحه دارای یک مختصات دکارتی $(x,y)$ و یک مختصات قطبی $(r,\theta)$ است (ر. ک. شکلِ ۱ (ج) ). رابطهٔ بین مختصات دکارتی و قطبی نقطهٔ $P$ به صورت زیر است:

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} r=\sqrt{x^۲+y^۲} \\ \tan\theta=y/x \end{cases}$$

در تبدیل مختصات دکارتی به قطبی باید دقت کرد که $\theta$ را متناسب با محل قرار گرفتن نقطه تعیین کرد زیرا دورهٔ تناوب تابع تانژانت برابر با $\pi$ است. در نتیجه مثلاً در فاصلهٔ $[۰,۲\pi]$ دو زاویه وجود دارد که تانژانت آن برابر ۱ است، یکی $\pi/۴$ و دیگری $\pi/۴+\pi$. بنابراین اگر به عنوان مثال برای تبدیل مختصات دکارتی به قطبی نقطهٔ $P$ داشته باشیم $\tan\theta=۱$ آنگاه اگر $P$ در ربع اول باشد آنگاه $\theta=\pi/۴$ و اگر در ربع سوم باشد آنگاه $\theta=\pi+\pi/۴$.

**مثال ۱٫۲ .** *نقطه $P=(۲,۳\pi/۴)$ را به مختصات دکارتی و $Q=(-۳,-\sqrt{۳})$ را به مختصات قطبی تبدیل کنید.*

**حل.** با استفاده از فرمول فوق داریم

$$P=(۲,۳\pi/۴)\Rightarrow r=۲,\theta=۳\pi/۴\Rightarrow\begin{cases} x=۲\cos ۳\pi/۴=۲\times(-\sqrt{۲}/۲)=-\sqrt{۲} \\ y=۲\sin ۳\pi/۴=۲\times(\sqrt{۲}/۲)=\sqrt{۲} \end{cases}$$

بنابراین مختصات دکارتی $P$ به صورت $(-\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ است.

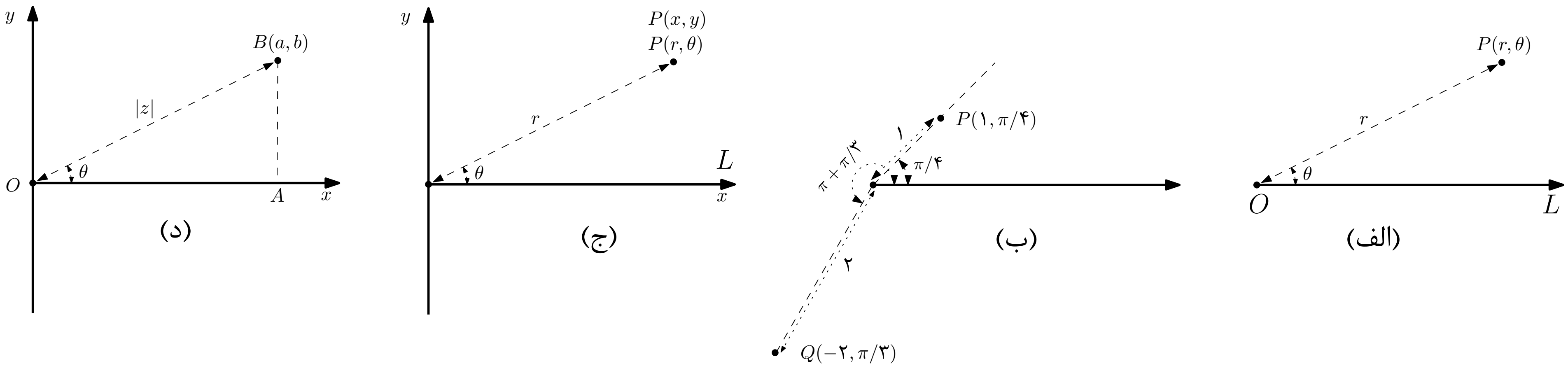
$$Q=(-۳,-\sqrt{۳})\Rightarrow\begin{cases} r=\sqrt{(-۳)^۲+(-\sqrt{۳})^۲}=\sqrt{۱۲}=۲\sqrt{۳} \\ \tan\theta=\frac{-\sqrt{۳}}{-۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}\overset{\text{نقطه در ربع سوم}}{\Longrightarrow}\theta=\pi+\pi/۳ \end{cases}$$

بنابراین $(۲\sqrt{۳},\pi+\pi/۳)$ مختصات قطبی نقطهٔ $Q$ است. □

از فرمول تبدیل مختصات دکارتی به قطبی می‌توان برای تبدیل معادلات دکارتی به قطبی نیز استفاده کرد. به عنوان مثال معادلهٔ دکارتی $x^۲+y^۲=۴$ را در نظر بگیرید. با جایگزینی $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$ داریم

$$(r\cos\theta)^۲+(r\sin\theta)^۲=۴\Rightarrow r^۲\cos^۲\theta+r^۲\sin^۲\theta=۴\Rightarrow r^۲(\cos^۲\theta+\sin^۲\theta)=۴\Rightarrow r^۲=۴$$

در نتیجه $r=\pm۲$ معادلهٔ فوق در دستگاه مختصات قطبی است. در حقیقت نقاطی که فاصلهٔ آنها تا مبدأ برابر با ۲ باشد یعنی تمام نقاط روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع ۲ در این معادله صدق می‌کنند. واضح است که معادلهٔ قطبی دایرهٔ فوق به مراتب ساده‌تر از معادله دکارتی آن است و عملاً به تعریف دایره نیز نزدیک‌تر است.




شکل ۱: (الف) دستگاه مختصات قطبی (ب) نمایش نقاط $P(۱,\pi/۴)$ و $Q(-۲,\pi/۳)$ در دستگاه مختصات قطبی(ج) دستگاه مختصات قطبی و دکارتی (د) نمایش مثلثاتیِ اعداد مختلط

## تمرین

۱. مختصات دکارتی نقطه به مختصات قطبی داده شده را بیابید .
الف) $(۰,\pi)$ ب) $(-۸,۲\pi/۳)$ ج) $(۱۲,-\pi/۴)$
د) $(۵,۵\pi/۶)$ ه) $(-۱۰,-۳\pi/۲)$ و) $(\pi,\pi)$

۲. تمام نمایشهای نقطه به مختصات دکارتی داده شده را در مختصات قطبی (به انضمام آنهایی که $r$ منفی دارند) پیدا کنید.
الف) $(-\sqrt{۲},-\sqrt{۲})$ ب) $(۱,-\sqrt{۳})$ ج) $(۲\sqrt{۳},۲)$
د) $(۰,۴)$ ه) $(-۳,۰)$ و) $(-\pi,\pi)$

۳. نشان دهید که فاصله بین دو نقطه $P_۱=(r_۱,\theta_۱)$ و $P_۲=(r_۲,\theta_۲)$ مساوی است با

$$|P_۱P_۲|=\sqrt{r_۱^۲+r_۲^۲-۲r_۱r_۲\cos(\theta_۲-\theta_۱)}$$

۴. با استفاده از فرمول فوق فاصله بین نقاط زیر را بیابید.
الف) $(۵,-\pi/۱۲),(۸,\pi/۴)$ ب) $(-۱۶,۵\pi/۴),(۱۲,۳\pi/۴)$

۵. نشان دهید که معادله قطبی دایره به شعاع $a$ ومرکز $(r,\theta)$ عبارت است از

$$r^۲-۲rr_۱\cos(\theta-\theta_۱)+r^۲=a^۲$$

# ۲ اعداد مختلط

در این بخش به معرفی مجموعه‌ای از اعداد که تعمیمی از دستگاه اعداد حقیقی است، می‌پردازیم. مشکلترین قسمت در کار با اعداد مختلط، فهمیدن علت نیاز به این اعداد است. لذا قبل از تعریف اعداد مختلط، نگاهی مختصر به دلیل معرفی اعداد مختلط می‌اندازیم.

اصولاً طبیعی ترین شکل اعداد، اعداد طبیعی یعنی $\mathbb{N}=\{۱,۲,۳,\ldots\}$ است. مفهوم این اعداد کاملاً مشخص است و معمولاً برای پاسخ به سئوال «چه تعداد ...؟» از آنها استفاده می‌شود. اعمال جبری نظیر جمع، تفریق و ضرب این اعداد به آسانی تعریف می‌شوند. اما در موقع به کار بردن تفریق، اگر یک عدد از عددی کوچکتر کسر شود، به مشکل برخورد می‌کنیم. مثلاً اگر به عبارت $۳-۵$ برخورد کنید، حاصل با هیچ عدد طبیعی قابل بیان نیست. لذا برای رفع این مشکل، مجموعهٔ اعداد صحیح یعنی $\mathbb{Z}=\{\ldots,-۲,-۱,۰,۱,۲,\ldots\}$ تعریف می‌شوند. در حقیقت، اعداد منفی و عدد صفر به مجموعهٔ اعداد طبیعی اضافه شد. در این دستگاه، مجموع، تفاضل و حاصلضرب هر دو عدد با معنی است. اصطلاحاً گوییم مجموعهٔ اعداد صحیح نسبت به اعمال جمع، تفریق و ضرب، بسته است.

با تعریف تقسیم یک عدد بر عدد دیگر، هرچند در ابتدا و از لحاظ مفهوم مشکلی وجود ندارد، ولی باز به مشکلی مشابه مشکل ایجاد شده توسط تفاضل در مجموعهٔ اعداد طبیعی برخورد می‌کنیم. مثلاً برای تقسیم $۳\div۲$ عددی صحیح وجود ندارد. برای رفع این مشکل، چاره‌ای جز گسترش مجموعهٔ اعداد صحیح نداریم. لذا مجموعهٔ اعداد گویا را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\,\middle|\,m,n\in\mathbb{Z},n\neq ۰\right\}.$$ [1]

البته در مورد این اعداد اولین مشکل، وجود نمایشهای متعدد برای یک عدد است، چیزی که در شکلهای قبلی اعداد با آن مواجه نبودیم. البته این مشکل با تعریف تساوی دو عدد گویا قابل رفع است. تعریف

[1] آیا تاکنون به دلیل این شرط فکر کرده‌اید؟

اعداد گویا نیز به سلسله مشکلهای موجود پایان نمی‌دهد. چرا که عدد گویایی وجود ندارد که مربع آن برابر با عدد ۲ باشد. به عبارت دیگر $\sqrt{2}$ برابر با هیچ عدد گویایی نیست (بررسی آن با استفاده از فرض خلف، خالی از لطف نیست!). باز برای حل این مشکل، مجموعهٔ اعداد گویا را به مجموعهٔ اعداد حقیقی ($\mathbb{R}$) گسترش می‌دهیم.

حال این سئوال مطرح می‌شود که آیا مجموعهٔ اعداد حقیقی برای کاربردهای ما کافی است؟ به عبارت دیگر آیا تاکنون به بن بستی در استفاده از اعداد حقیقی برخورد کرده‌اید؟ اگر جواب شما به سئوال اخیر منفی است، به راحتی می‌توانید از مبحث اعداد مختلط صرفنظر کنید. هر چند دلیل زیر ممکن است نظر شما را عوض کند.

معادلهٔ سادهٔ $x^2+1=0$ را در نظر بگیرید. آیا جوابی برای این معادله در دستگاه اعداد حقیقی سراغ دارید؟ مطمئناً جواب منفی است چرا که توان دوم هر عدد حقیقی، مثبت است و در نتیجه اضافه شدن عدد یک به آن به عددی بزرگتر از ۱ منجر می‌شود. به عبارت دیگر، حل معادلهٔ فوق به قرار گرفتن یک عدد منفی زیر رادیکال با فرجهٔ زوج منجر می‌شود. تاکنون در حل معادلاتی اینچنین به عبارت «معادله ریشهٔ حقیقی ندارد» اکتفا می‌کردیم. اما در حقیقت با مشکلی مشابه مشکلات دستگاههای قبلی مواجهیم. تعریف اعداد مختلط، چاره‌ای برای رفع این مشکل است.

در تمام مواردی نظیر معادلهٔ فوق که به بن بست برخورد می‌کردیم، دلیل را می‌توان به عدم تعریف رادیکال با فرجهٔ زوجِ یک عدد منفی تبدیل کرد. در نتیجه اگر این مشکل حل شود، بن بست موجود در اعداد حقیقی نیز حل خواهد. مطابق معمول، باید اعداد حقیقی را گسترش دهیم. اولین قدم در گسترش اعداد حقیقی تعریف عدد $i$ است. عدد $i$ را به عنوال اولین عدد غیر حقیقی برابر با $\sqrt{-1}$ تعریف می‌کنیم. با این تعریف، $i$ یک جواب معادلهٔ فوق است و هر عدد منفی زیر رادیکال با فرجه زوج نیز به راحتی برحسب آن قابل بیان است. به عنوان مثال

$$\sqrt{-3}=\sqrt{3\times -1}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=\sqrt{3}\times i.$$

در انجام محاسبات بالاخص رادیکاها در اعداد مختلط باید دقت کرد. به مثال زیر توجه کنید.

طبق تعریف $i$، $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$. از طرف دیگر

$$i^2=(\sqrt{-1})^2\stackrel{?}{=}\sqrt{(-1)^2}=\sqrt{1}=1.$$

لذا $i^2$ هم برابر با ۱ است و هم $-1$ که منطقی نیست. قانون کلی در انجام محاسبات این است که در طول محاسبات $\sqrt{-1}$ باید در اولین فرصت با $i$ جایگزین شود و سپس محاسبات ادامه پیدا کند. با این قانون، محاسبات دوم، در قسمتی که $(\sqrt{-1})^2$ با $\sqrt{(-1)^2}$ جایگزین شده است، اشتباه است.

در ادامه شکلهای دیگر اعداد مختلط و اعمال جبری روی اعداد مختلط تعریف می‌شوند. هدف از مطالب بعدی جایگزینی اعداد مختلط به جای اعداد حقیقی است. البته پس از اتمام مطالب، می‌توانید به بن بستهای احتمالی موجود در اعداد مختلط نیز فکر کنید، هر چند توصیه نمی‌شود.

**تعریف ۲٫۱ .** (*اعداد مختلط*)
*عبارتی به صورت $z=a+ib$ را که درآن $a,b\in\mathbb{R}$ و $i^2=-1$ را یک عدد مختلط می‌نامیم. مجموعهٔ تمام اعداد مختلط را با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم. یعنی* $\mathbb{C}=\{a+ib|\ \ a,b\in\mathbb{R},\ \ i^2=-1\}$.

اگر $z=a+ib$، آنگاه $a$ را قسمت حقیقی[1] عدد $z$ می‌نامند و با $\Re(z)$ نمایش می‌دهند و $b$ را قسمت موهومی[2] عدد $z$ می‌نامند و با $\Im(z)$ نمایش می‌دهند.
**قرارداد:** عدد مختلط $z=a+ib$ را که قسمت موهومی آن برابر با صفر باشد با عدد حقیقی $a$ یکی می‌گیریم. در نتیجه مجموعهٔ اعداد مختلط حاوی مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌باشد یعنی $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

در ادامه، تساوی و چهار عمل اصلی را روی اعداد مختلط تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۲٫۲ .** (*تساوی دو عدد مختلط*)
*فرض کنید $z_1=a_1+ib_1$ و $z_2=a_2+ib_2$ دو عدد مختلط باشند. در این صورت $z_1=z_2$ اگر و تنها اگر $a_1=a_2$ و $b_1=b_2$.*

**تعریف ۲٫۳ .** (*مجموع، تفاضل و حاصلضرب اعداد مختلط*)
*فرض کنید $z_1=a_1+ib_1$ و $z_2=a_2+ib_2$ دو عدد مختلط باشند.*

*الف) مجموع و تفاضل دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$z_1\pm z_2=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2)$$

*ب) حاصلضرب دو عدد مختلط به صورت زیر تعریف می‌شود:*

$$z_1.z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1)$$

با تعریف فوق می‌توان نشان داد که $i^2=-1$. همچنین قرینهٔ هر عدد مختلط با قرینه کردن قسمت حقیقی و موهومی آن حاصل می‌شود.

**تعریف ۲٫۴ .** (*عکس یک عدد مختلط*)
*عدد مختلط $z=a+ib$ مفروض است. عدد مختلط $z_1=a_1+ib_1$ را عکس عدد $z$ گوییم اگر $z.z_1=1$ وآن را با $1/z$ یا $z^{-1}$ نمایش می‌دهیم.*

به راحتی می‌توان نشان داد که $1/z=(a-ib)/(a^2+b^2)$. مثلاً $1/i=-i$. طبق تعریف فوق و مشابه اعداد حقیقی عدد صفر عکس ندارد و عکس هر عدد مختلط ناصفر موجود و منحصر به فرد است.

حال با استفاده از تعریف عکس، خارج قسمت دو عدد مختلط را تعریف می‌کنیم.

**تعریف ۲٫۵ .** (*خارج قسمت دو عدد مختلط*)
*فرض کنید $z_1=a_1+ib_1$ و $z_2=a_2+ib_2\neq 0$ دو عدد مختلط باشند. تقسیم $z_1$ بر $z_2$ عبارت است از $z_1/z_2=z_1.z_2^{-1}$*

[1] real part
[2] imaginary part

به عنوان مثال $-i = (1+i)/(1-i)$ و $i = (1-i)/(1+i)$.

**تعریف ۲٫۶ .** (*مزدوج عدد مختلط*)
*عدد مختلط $z = a+ib$ مفروض است. عدد $a-ib$ را مزدوج $z$ می‌نامیم و آن را با $\bar{z}$ نمایش می‌دهیم.*

برای اعداد مختلط $z$، $z_1$ و $z_2$ روابط زیر به راحتی اثبات می‌شود:

۱) $z\bar{z}$ عددی حقیقی است. ۲) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$ ۳) $\overline{z_1.z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$
۴) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$ ۵) $\overline{(\bar{z})} = z$

اگر عدد مختلط $a+ib$ را با زوج مرتب $(a,b)$ نظیر کنیم آنگاه یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه و اعداد مختلط بوجود می‌آید. به همین دلیل گاهی اوقات دستگاه اعداد مختلط را صفحهٔ مختلط می‌نامند. همچنین هر عدد مختلط را می‌توان به صورت یک بردار که ابتدای آن بر مبدأ و انتهای آن نقطهٔ متناظر با عدد مختلط است در نظر گرفت.

**تعریف ۲٫۷ .** (*قدرمطلق یک عدد مختلط*)
*عدد مختلط $z = a+ib$ مفروض است. عدد حقیقی و نامنفی $\sqrt{a^2+b^2}$ را قدرمطلق (یا هَنگ) $z$ می‌نامیم و با $|z|$ نمایش می‌دهیم.*

بوضوح در حالتی که $z$ یک عدد حقیقی باشد تعریف فوق معادل تعریف قدر مطلق اعداد حقیقی است. برای اعداد مختلط $z$، $z_1$ و $z_2$ روابط زیر به راحتی اثبات می‌شود:

۱) $|\Im(z)| \le |z| \ , \ |\Re(z)| \le |z|$ ۲) $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$
۳) اگر $z_2 \ne 0$، $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ ۴) $|\bar{z}| = |z|$
۵) $|z|^2 = z\bar{z}$ ۶) (نامساوی مثلثی) $|z_1+z_2| \le |z_1| + |z_2|$
۷) $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 - z_2|$

## ۱.۲ نمایش مثلثاتی اعداد مختلط

عدد مختلط $z = a+ib \ne 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنید زاویهٔ بین نمایش برداری این عدد با جهت مثبت محور $x$ ها برابر $\theta$ باشد (ر.ک. شکلِ ۱(ج)). در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB داریم

$$\sin\theta = \frac{BA}{OB} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{b}{|z|},\ \cos\theta = \frac{OA}{OB} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a}{|z|}.$$

در نتیجه $b = |z|\sin\theta$ و $a = |z|\cos\theta$. بنابراین

$$z = a+ib = |z|\cos\theta + i|z|\sin\theta = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$$

توجه کنید که $\theta$ منحصربفرد نیست. زیرا به ازای هر عدد صحیح $k$، $\theta + 2k\pi$ نیز زاویهٔ $z$ با محور $x$ هاست. نمایش فوق برای یک عدد مختلط را شکل مثلثاتی عدد مختلط می‌نامند. $\theta$ را آرگومان $z$ می‌نامند و با $arg z$ نمایش می‌دهند. منظور از آرگومان اصلی عدد مختلط، آرگومانی است که بین ۰ و $2\pi$ باشد. معمولاً اعداد مختلط را با آرگومان اصلی نمایش می‌دهند. توجه کنید که آرگومان عدد صفر تعریف نشده است. با توجه به روابط فوق داریم $\tan\theta = \frac{b}{a}$ و لذا $\theta = \arctan(\frac{b}{a})$. با استفاده از این فرمول به راحتی می‌توان هر عدد مختلط را به شکل مثلثاتی نوشت. به عنوان مثال عدد $z = i$ دارای شکل مثلثاتی $z = i = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = 1(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$ است. مزیت اصلی استفاده از شکل مثلثاتی اعداد مختلط این است که ضرب، تقسیم و توان را می‌توان به سادگی در این شکل اعداد مختلط انجام داد. فرض کنید $z_1 = |z_1|(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ و $z_2 = |z_2|(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ دو عدد مختلط به شکل مثلثاتی باشند. روابط زیر به سادگی قابل اثبات است:

۱. $z_1.z_2 = |z_1||z_2|\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$

۲. اگر $z_1 \ne 0$، $1/z_1 = (1/|z_1|)(\cos\theta_1 - i\sin\theta_1)$

۳. اگر $z_2 \ne 0$، $z_1/z_2 = (|z_1|/|z_2|)\left(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right)$

۴. اگر $z_k = |z_k|(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) \quad (1 \le k \le n)$ آنگاه

$$z_1.z_2.\cdots.z_n = |z_1||z_2|\cdots|z_n|\left(\cos(\theta_1+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\cdots+\theta_n)\right)$$

۵. با قرار دادن $z_1 = z_2 = \cdots = z_n = z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ در فرمول فوق داریم $z^n = |z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

۶. (دستور دموآور) $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

برای اعداد مختلط شکل نمایی نیز داریم.

در آینده خواهیم دید که $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$. اگر قرار دهیم $x = i\theta$ و نتیجه را مرتب کنیم داریم: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. این فرمول را فرمول اویلر گوییم. در حالت کلی اگر $z = x+iy$ آنگاه $e^z = e^{x+iy} = e^x.e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$. بنابر دستور دوموآور $(e^{i\theta})^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta = e^{in\theta}$. برای تبدیل اعداد مختلط به شکل نمایی کافی است آن را به شکل مثلثاتی تبدیل کنیم و سپس به جای $\cos\theta + i\sin\theta$ عبارت $e^{i\theta}$ قرار دهیم.

شکل نمایی اعداد مختلط نیز در محاسبهٔ حاصلضرب، خارج قسمت و توان اعداد مختلط بسیار مفید است. اگر $z = |z|e^{i\theta}$، $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}$ و $z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$ آنگاه

۱) $z_1.z_2 = |z_1||z_2|e^{i(\theta_1+\theta_2)}$ ۲) اگر $z_2 \ne 0$، $z_1/z_2 = (|z_1|/|z_2|)e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
۳) $z^n = |z|^n e^{in\theta}, \quad (n \in \mathbb{Z})$ ۴) $z^{-1} = 1/|z|(e^{-i\theta})$

## ۲.۲ ریشه‌های اعداد مختلط

در این قسمت قصد داریم ریشه‌های $n$ام عدد مختلط $z$ را بدست آوریم. به عبارت دیگر می‌خواهیم معادلهٔ $w^n = z$ را که در آن $n$ عدد طبیعی است و $z$ یک عدد مختلط داده شده است را حل کنیم. این کار را با استفاده از شکل مثلثاتی اعداد مختلط انجام خواهیم داد.

**قضیه ۲٫۸ .** *اگر $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ یک عدد مختلط و $n$ یک عدد طبیعی باشد آنگاه معادلهٔ $w^n = z$ دارای $n$ جواب است. به عبارت دیگر عدد مختلط $z$ دارای $n$ ریشهٔ متمایز به صورت زیر است:*

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right)+i\sin\left(\frac{۲k\pi+\theta}{n}\right)\right)\qquad k=۰,۱,\ldots,n-۱$$

به عنوان مثال برای محاسبهٔ ریشه های دوم عدد $z = ۱+i$ داریم $z = ۱+i = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴}+i\sin\frac{\pi}{۴})$ و لذا

$$w_k = \sqrt[۲]{\sqrt{۲}}\left(\cos\left(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۴}}{۲}\right)+i\sin\left(\frac{۲k\pi+\frac{\pi}{۴}}{۲}\right)\right)\qquad k=۰,۱$$

بنابراین ریشه‌های دوم عدد $z = ۱+i$ عبارتند از

$$w_۰ = \sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{\pi}{۸}+i\sin\frac{\pi}{۸})\ ,\quad w_۱ = \sqrt[۴]{۲}(\cos\frac{۹\pi}{۸}+i\sin\frac{۹\pi}{۸})$$

در حالت خاص جوابهای معادلهٔ $z^n = ۱$ که $n$ یک عدد طبیعی است را ریشه‌های $n$ام واحد می‌نامند. به عنوان مثال ریشه های سوم واحد به صورت زیر محاسبه می‌شوند. چون $z = ۱ = ۱(\cos ۰ + i\sin ۰)$، لذا

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[۳]{۱}\left(\cos\left(\frac{۲k\pi+۰}{۳}\right)+i\sin\left(\frac{۲k\pi+۰}{۳}\right)\right)\\ &= \cos(\frac{۲k\pi}{۳})+i\sin(\frac{۲k\pi}{۳})\qquad k=۰,۱,۲ \end{aligned}$$

با جایگزینی مقادیر $k$ داریم $w_۰ = \cos ۰ + i\sin ۰ = ۱$، $w_۱ = \cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}+i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$، و $w_۲ = \cos\frac{۴\pi}{۳}+i\sin\frac{۴\pi}{۳} = -\frac{۱}{۲}-i\frac{\sqrt{۳}}{۲}$.

از لحاظ هندسی اگر ریشه‌های $n$ام عدد مختلط $z$ را در صفحه مشخص کنیم، این نقاط روی دایره‌ای به مرکز مبدأ و به شعاع $\sqrt[n]{|z|}$ قرار می‌گیرند و تشکیل یک $n$ ضلعی منتظم می‌دهند.

## ۳.۲ معادلات چندجمله‌ای

یکی از کاربردهای اعداد مختلط در حل معادلات چندجمله‌ای است. ما اغلب در صدد حل معادلات چند جمله‌ای از درجهٔ $n$ به صورت $a_۰z^n + a_۱z^{n-۱} + \cdots + a_{n-۱}z + a_n = ۰$ هستیم که در آن $a_i$ها اعداد مختلط می‌باشند. ساده ترین این معادلات، معادلات درجهٔ دوم $ax^۲ + bx + c = ۰$ است. بنابر قضیهٔ اساسیِ جبر هر معادلهٔ چند جمله‌ای حداقل یک ریشهٔ مختلط دارد و لذا می‌توان نشان داد که هر چندجمله‌ای از درجهٔ $n$ دارای $n$ ریشه مختلط است که ممکن است بعضی یا همه آنها برابر باشند.

**نکته:** در حل معادلات چندجمله‌ای در اعداد مختلط در مواردی به رادیکال برخورد می‌کنیم. در این حالت صرفنظر از اینکه زیر رادیکال یک عدد حقیقی یا مختلط است باید به تعداد فرجهٔ آن رادیکال جواب برای رادیکال محاسبه کنیم و متناظر با هر جواب، یک جواب برای معادلهٔ اصلی بیابیم.

**مثال ۲٫۹ .** *معادلهٔ $z^۴ + z^۲ + ۱ = ۰$ را حل کنید.*

**حل.** با قرار دادن $z^۲ = A$ معادلهٔ فوق به معادلهٔ درجه دوم $A^۲ + A + ۱ = ۰$ تبدیل می‌شود. و لذا داریم

$$\Delta = ۱ - ۴ = -۳ \Rightarrow A_{۱,۲} = \frac{-۱+\sqrt{-۳}}{۲}$$

اما ریشه‌های دوم عدد $-۳ = ۳(\cos\pi + i\sin\pi)$ به صورت زیر است:

$$\sqrt[۲]{-۳} = \sqrt{۳}\left(\cos\left(\frac{\pi+۲k\pi}{۲}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+۲k\pi}{۲}\right)\right),\quad k=۰,۱$$

$$\Rightarrow \sqrt{-۳} = \begin{cases} \sqrt{۳}(\cos\frac{\pi}{۲}+i\sin\frac{\pi}{۲}) = i\sqrt{۳}\\ \sqrt{۳}(\cos\frac{۳\pi}{۲}+i\sin\frac{۳\pi}{۲}) = -i\sqrt{۳}\end{cases}$$

و لذا

$$A_۱ = \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲}\quad ,\quad A_۲ = \frac{-۱-i\sqrt{۳}}{۲}$$

حال برای به دست آوردن جوابهای معادلهٔ اصلی، معادلهٔ $z^۲ = A$ را حل می‌کنیم.

$$z^۲ = A_۱ \Rightarrow z^۲ = \frac{-۱+i\sqrt{۳}}{۲} = \cos\frac{۲\pi}{۳}+i\sin\frac{۲\pi}{۳}$$

با محاسبهٔ ریشهٔ دوم، داریم

$$\begin{aligned} z_۱ &= \cos\frac{۲\pi}{۶}+i\sin\frac{۲\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}i\\ z_۲ &= \cos(\pi+\frac{۲\pi}{۶})+i\sin(\pi+\frac{۲\pi}{۶}) = -\frac{۱}{۲}-\frac{\sqrt{۳}}{۲}i \end{aligned}$$