به نام خدا

ریاضیات عمومی 2

علی اکبر علیجانی

فهرست مطالب

1- ماتریس ها

2- توابع دو متغیره

3- انتگرال دوگانه

4- دنباله ها و سری ها

0- مشتقات و انتگرال های خاص

در این فصل مشتق و انتگرال برخی از توابع خاص جهت استفاده در فصول 2، 3 و 4 بیان می شود.

در فرمول های 1 تا 6، u تابعی دلخواه بر حسب x است:

$$1)\left(u^{n}\right)' = nu'u^{n-1}$$

$$\left(x^{n}\right)' = nx^{n-1}$$

$$2)\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$3)(\sin u)' = u'\cos u$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$4)(\cos u)' = -u'\sin u$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$5)\left(e^{u}\right)' = u'e^{u}$$

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

$$6)(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

قواعد مشتق گیری:

u و v توابعی بر حسب x هستند:

$$1)(u \pm v)' = u' \pm v'$$

$$2)(uv)' = u'v + v'u$$

$$3)\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

انتگرال برخی از توابع خاص:

$$1)\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad n \neq -1$$

$$2)\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$$

$$3)\int \sin ax dx = -\frac{1}{a}\cos ax + c$$

$$4)\int \cos ax dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$$

$$5)\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}\sin ax + c$$

1- ماتریس ها

تعریف 1.1 هر آرایه ی مستطیل شکل از اعداد حقیقی را یک ماتریس نامند.

$$A=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}_{3\times1}\quad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\end{bmatrix}_{1\times3}\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}_{2\times2}\quad D=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\\7 & 8 & 9\end{bmatrix}_{3\times3}$$

ماتریس ها را با حروف بزرگ انگلیسی نمایش می دهند.

تعریف 2.1 مرتبه یک ماتریس عبارتست از عدد دوم$\times$عدد اول که عدد اول نشان دهنده تعداد سطر ها و عدد دوم نشان دهنده تعداد ستون ها است. به عنوان مثال، ماتریس B دارای یک سطر و سه ستون است. بنابراین مرتبه ماتریس B برابر است با 1×3.

توجه داشته باشید که برای نمایش ماتریس A از مرتبه $m\times n$ از نماد $A=(a_{ij})_{m\times n}$ استفاده می کنند. در اینجا، a_{ij} درایه سطر iام و ستون j ام است. به عنوان مثال، در ماتریس D، $d_{23}=6$.

تعریف 3.1 ماتریسی که همه درایه های آن برابر با صفر باشد را ماتریس صفر نامیده و با 0 نمایش می دهند.

اعمال جبری روی ماتریس ها:

1- جمع و تفاضل دو ماتریس: فرض $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ دو ماتریس هم مرتبه باشند. آنگاه جمع (تفاضل) A و B را با $A+B$ ($A-B$) نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})$$

به عبارت دیگر، درایه ها نظیر به نظیر با هم جمع (یا از هم کم) گردند.

2- ضرب دو ماتریس:

فرض کنید A یک ماتریس از مرتبه $m\times n$ و B یک ماتریس از مرتبه $n\times p$ باشد. آنگاه AB قابل تعریف بوده و بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$C=AB$$

$$c_{ij}=\sum_{r=1}^{n}a_{ir}b_{rj}$$

مثال 1.1 جمع، تفاضل و ضرب ماتریس های داده شده را بدست آورید:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$$

$$A+B=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix} \qquad A-B=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & -2\end{bmatrix} \qquad AB=\begin{bmatrix}3 & 3\\ -1 & -1\end{bmatrix}$$

تعریف 4.1 فرض کنید c یک عدد حقیقی و $A=(a_{ij})$ یک ماتریس دلخواه باشد. آنگاه ضرب c در A را با cA نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$cA=(ca_{ij})$$

تعریف 5.1 فرض کنید A یک ماتریس از مرتبه $n\times n$ باشد. درایه های a_{11}، a_{22}، ...، a_{nn} را درایه های قطر اصلی نامند.

به عنوان مثال، درایه های قطر اصلی ماتریس $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ عبارتند از 1، -1.

تعریف 6.1 ماتریسی که همه درایه های قطر اصلی آن برابر با یک و سایر درایه ها صفر باشند را ماتریس واحد نامند. ماتریس های واحد از مرتبه 2×2 و 3×3 به شکل زیر هستند:

$$I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \qquad I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

دترمینان یک ماتریس 2×2:

دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$ را با $|A|$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$|A|=a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$$

به عنوان مثال، دترمینان ماتریس $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ برابر است با -3.

همسازه درایه سطر i ام ستون j ام یک ماتریس 3×3:

همسازه درایه سطر i ام ستون j ام ماتریس A را با A_{ij} نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \left| M_{ij} \right|$$

که M_{ij} ماتریسی است که از حذف سطر i ام ستون j ام بدست می آید.

دترمینان یک ماتریس 3×3:

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

مثال 2.1 دترمینان ماتریس زیر را بدست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$|A| = 1\times -1 + 1\times 2 + 3\times 1 = 4$$

تعریف 7.1 فرض کنید A یک ماتریس از مرتبه $n\times n$ باشد. ماتریس $n\times n$ ، B را وارون A نامند هرگاه:

$$AB = BA = I$$

توجه داشته باشید که وارون ماتریس A را در صورت وجود با A^{-1} نمایش می دهند.

وارون یک ماتریس 2×2 :

اگر $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ و $|A|\neq 0$، آنگاه:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال 3.1 وارون ماتریس $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ را بدست می آوریم:

$$-\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

تعریف 8.1 ماتریس الحاقی A را با A^* نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$A^*=(A_{ij})$$

تعریف 9.1 فرض کنید A یک ماتریس از مرتبه $m\times n$ باشد. ترانهاد ماتریس A را با A^t نمایش داده و عبارت است از ماتریسی که از تعویض جای سطر و ستون های A بدست می آید.

به عنوان مثال، ترانهاده ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ برابر است با $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

قضیه 1.1 فرض کنید A یک ماتریس مربعی باشد. اگر $|A|\neq 0$، آنگاه A^{-1} موجود و بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(A^*)^t$$

مثال 4.1 وارون ماتریس زیر را در صورت وجود تعیین می کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{12}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{13}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{23}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix}=-1 \qquad A_{32}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}=1 \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1$$

$$|A|=1\times -1+1\times -1+0\times 1=-2\neq 0$$

$$A^{*}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow (A^{*})^{t}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{bmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2}\\ \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

اعمال سطری مقدماتی:

1- ضرب یک سطر در یک عدد غیر صفر (به عنوان مثال cR_1)

2- تعویض جای دو سطر ($R_1 \to R_2$)

3- افزودن مضربی از یک سطر به سطر دیگر ($cR_1 + R_2 \to R_2$)

مثال 5.1 سه عمل سطری مقدماتی اشاره شده در تعریف بالا را برای ماتریس $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ به کار می بریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{2R_1} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{3R_1-R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3\times 2-(-1)=7 & 3\times 4-1=11 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 7 & 11 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

دستگاههای سه معادله سه مجهول:

شکل یک دستگاه سه معادله سه مجهول بصورت زیر است:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

برای حل دستگاههای بالا، ابتدا بایستی ماتریس افزوده دستگاه را که به شکل زیراست تشکیل دهیم:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & b_3 \end{bmatrix}$$

سپس با انجام اعمال سطری مقدماتی بایستی ماتریس بالا را به شکل ماتریسی شبیه ماتریس زیر تبدیل کنیم:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \vdots & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & \vdots & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & \vdots & d_3 \end{bmatrix}$$

مثال 6.1 دستگاههای زیر را حل می کنیم:

$$1)\begin{cases} x - y + z = 1/5 \\ 3x - 2y - z = 1 \\ x + 3y - 2z = 0/5 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1.5 \\ 3 & -2 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-3R_1+R_2\to R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1.5 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3.5 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3\to R_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1.5 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3.5 \\ 0 & 4 & -3 & \vdots & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{-4R_2+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 1.5 \\ 0 & 1 & -4 & \vdots & -3.5 \\ 0 & 0 & 13 & \vdots & 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - y + z = 1.5 \\ y - 4z = -3.5 \\ 13z = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0.5 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 2x - y + z = 0/5 \\ x - 3y - z = -1 \\ x + 3y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & \vdots & 0/5 \\ 1 & -3 & -1 & \vdots & -1 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \Leftrightarrow R_1} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -1 \\ 2 & -1 & 1 & \vdots & 0/5 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 0.5 \end{bmatrix} \xrightarrow{-2R_1+R_2 \to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 5 & 3 & \vdots & 2/5 \\ 1 & 3 & -2 & \vdots & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{-R_1+R_3 \to R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 5 & 3 & \vdots & 2/5 \\ 0 & 6 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{5}R_2 \to R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \vdots & 0/5 \\ 0 & 6 & -1 & \vdots & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{-6R_2+R_3 \to R3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{5} & \vdots & 0/5 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{5} & \vdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ y + \frac{3}{5}z = \frac{2/5}{5} \\ -\frac{23}{5}z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0/5 \\ y = 0/5 \\ z = 0 \end{cases}$$

تمرینات

1- وارون ماتریس های زیر را در صورت وجود تعیین نمائید:

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

2- دستگاههای زیر را حل نمائید:

$$\begin{cases}2x-y+z=2\\ 3x-2y-z=0\\ x+3y-2z=2\end{cases}\qquad \begin{cases}-x-5y-5z=2\\ 4x-5y+4z=19\\ x+5y-z=-20\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+2y+z=1\\ 3x+y-z=2\\ x-y+2z=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x+y-z=1\\ 2x-4y+3z=1\\ 2x-z=1\end{cases}$$

2- توابع دو متغیره

تعریف 1.2 هر تابع $f:R^2 \to R$ که در آن $R^2=\{(x,y);x,y\in R\}$ را یک تابع دو متغیره نامند.

هر یک از توابع زیر، یک تابع دو متغیره است:

$$f_1=x+y \qquad f_2=x-y \qquad f_3=xy \qquad f_4=\frac{x}{y}$$

$$f_5=\sqrt{x^2+y^2} \qquad f_6=\sin(xy) \qquad f_7=\cos(x+y)$$

$$f_8=\frac{x-y}{x+y} \qquad f_9=x^2+y^2-xy+3x-2y+1 \qquad f_{10}=0$$

توجه داشته باشید که f_5 یک تابع دو متغیره رادیکالی، f_6 و f_7 توابع دو متغیره مثلثاتی، f_8 یک تابع دو متغیره کسری، f_9 یک تابع دو متغیره چند جمله ای و f_{10} یک تابع دو متغیره ثابت است.

تعریف 2.2 فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد. زیرمجموعه $A\subseteq R^2$ که به ازای هر $(x,y)\in A$، $f(x,y)$ تعریف شده باشد را دامنه f نامند.

مثال 1.2 دامنه هر یک از توابع داده شده در بالا را بدست می آوریم:

$$D_{f1}=D_{f2}=D_{f3}=D_{f5}=D_{f6}=D_{f7}=D_{f9}=D_{f10}=R^2$$

$$D_{f4}=\{(x,y);y\neq 0\}$$

$$D_{f8}=\{(x,y);x+y\neq 0\}=\{(x,y);y\neq -x\}$$

همانطور که ملاحظه می کنید، دامنه توابع دو متغیره چند جمله ای (f_9) و ثابت (f_{10}) برابر با R^2 است. درست شبیه آن چیزی که در ارتباط با توابع چند جمله ای و ثابت یک متغیره در ریاضی 1 دیده اید.

تعریف 3.2 گوییم حد تابع $f(x,y)$ وقتی (x,y) به سمت (a,b) میل می کند برابر l است و با $\lim_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)=l$ نمایش می دهیم هرگاه برای هر $\varepsilon\succ 0$، $\delta\succ 0$ وجود داشته باشد بطوریکه $|x-a|\prec\delta$

و $|y-b|\prec\delta$ نتیجه دهد که $|f(x,y)-l|\prec\varepsilon$:

$$\forall\varepsilon\succ 0\quad \exists\delta\succ 0\;\;;\;\; |x-a|\prec\delta, |y-b|\prec\delta \Rightarrow |f(x,y)-l|\prec\varepsilon$$

مثال 2.2 نشان می دهیم $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(0,0)}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}=0$:

$$\left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}-0\right|\le|x|\prec\delta$$

بنابراین کافیست برای ε داده شده، δ کوچکتر از ε انتخاب شود.

در بحث حد توابع دو متغیره، بیشتر از آنکه وجود حد اهمیت داشته باشد، عدم وجود حد اهمیت دارد.

قضیه 1.2 اگر $\lim\limits_{x\to a}(\lim\limits_{y\to b} f(x,y))\neq\lim\limits_{y\to b}(\lim\limits_{x\to a} f(x,y))$، آنگاه $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال 3.2 نشان می دهیم حدود زیر وجود ندارند:

$$1)\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{x+y}{x-y}$$

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{x+y}{x-y})=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}=1\qquad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{x+y}{x-y})=\lim_{x\to 0}\frac{y}{-y}=-1$$

$$2)\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)}\frac{xy+y^2}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{x\to 0}(\lim_{y\to 0}\frac{xy+y^2}{x^2+y^2})=0\qquad \lim_{y\to 0}(\lim_{x\to 0}\frac{xy+y^2}{x^2+y^2})=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2}=1$$

قضیه 2.2 فرض کنید $g(x)$ و $h(x)$ دو تابع باشند بطوریکه $g(a)=h(a)=b$. اگر:

$$\lim_{x\to a} f(x,g(x)) \neq \lim_{x\to a} f(x,h(x))$$

آنگاه $\lim\limits_{(x,y)\mapsto(a,b)} f(x,y)$ وجود ندارد.

مثال 4.2 نشان می دهیم حدود زیر وجود ندارند:

$$1)\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$y_1=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0 \qquad y_2=x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}$$

$$2)\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x^2y^4}{(x^2+y)^5}$$

$$y_1=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^{10}}=0 \qquad y_2=x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x^{10}}{32x^{10}}=\frac{1}{32}$$

$$3)\lim_{(x,y)\mapsto(0,0)} \frac{x\sin y}{x^2+y^2}$$

$$y_1=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{0}{x^2}=0 \qquad y_2=x \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{2}$$

مشتقات جزئی:

فرض کنید f یک تابع دو متغیره باشد. مشتق f نسبت به x را با f_x نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_x(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$$

بطور مشابه، مشتق f نسبت به y را با f_y نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$f_y(a,b)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h}$$

برای بدست آوردن f_x و f_y به ترتیب زیر عمل می کنیم:

با y شبیه عدد برخورد کرده و از تابع نسبت به x مشتق می گیریم: f_x

با x شبیه عدد برخورد کرده و از تابع نسبت به y مشتق می گیریم: f_y

مثال 5.2 f_x و f_y را برای هر یک از توابع زیر بدست می آوریم:

$$1)\ f(x,y)=x^2+y^2-xy+3x-2y+1$$

$$f_x=2x-y+3 \qquad f_y=2y-x-2$$

$$2)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$3)\ f(x,y)=\sin(xy)$$

$$f_x=y\cos(xy) \qquad f_y=x\cos(xy)$$

$$4)\ f(x,y)=e^{xy}$$

$$f_x=ye^{xy} \qquad f_y=xe^{xy}$$

در ریاضی 1، مشتقات مراتب بالاتر نیز قابل تعریف بود. در اینجا با مشتقات جزئی مراتب بالاتر آشنا می شویم:

با y شبیه عدد برخورد کرده و از تابع نسبت به x ، دو بارمشتق می گیریم: f_{xx}

با x شبیه عدد برخورد کرده و از تابع نسبت به y ، دو بارمشتق می گیریم: f_{yy}

ابتدا از تابع نسبت به x مشتق می گیریم، سپس از حاصل نسبت به y مشتق می گیریم: f_{xy}

مثال 6.2 f_{xx} ، f_{yy} و f_{xy} را برای توابع مثال قبل بدست می آوریم:

$$1)\ f(x,y)=x^2+y^2-xy+3x-2y+1$$

$$f_{xx}=2 \qquad f_{yy}=2 \qquad f_{xy}=-1$$

$$2)\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$f_{xx}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{yy}=\frac{\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}=\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f_{xy}=\frac{-xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$3)\ f(x,y)=\sin(xy)$$

$$f_{xx}=-y^2\sin(xy) \qquad f_{yy}=-x^2\sin(xy) \qquad f_{xy}=\cos(xy)-xy\sin(xy)$$

$$4)\ f(x,y)=e^{xy}$$

$$f_{xx}=y^2e^{xy} \qquad f_{yy}=x^2e^{xy} \qquad f_{xy}=e^{xy}+xye^{xy}$$

مقدار تقریبی یک تابع دو متغیره در مجاورت یک نقطه:

فرض کنید f یک تابع دو متغیره و $(a,b)\in D_f$. آنگاه:

$$f(a+h,b+\delta)\approx f(a,b)+f_x(a,b)\times h+f_y(a,b)\times\delta$$

مثال: فرض کنید $f(x,y)=x^2+y^2-xy+3x-2y+1$. می خواهیم تقریبی از $f(1/01,2/98)$ ارائه دهیم:

$$1/01=1+0/01 \Rightarrow a=1, h=0/01$$

$$2/98=3-0/02 \Rightarrow b=3, \delta=-0/02$$

$$f_x=2x-y+3 \Rightarrow f_x(1,3)=2-3+3=2$$

$$f_y=2y-x-2 \Rightarrow f_y(1,3)=6-1-2=3$$

$$f(1,3)=1+9-3+3-6+1=5$$

$$f(1/01,2/98)\approx 5+2\times 0/01+3\times -0/02=4/96$$

مثال 7.2 تقریبی از اعداد زیر ارائه می دهیم:

$$1)\sqrt{(2/98)^2+(4/01)^2}$$

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$2/98=3-0/02 \Rightarrow a=3, h=-0/02$$

$$4/01=4+0/01 \Rightarrow b=4, \delta=0/01$$

$$f_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f_x(3,4)=\frac{3}{5}$$

$$f_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \Rightarrow f_y(3,4)=\frac{4}{5}$$

$$f(3,4)=5$$

$$\sqrt{(2/98)^2+(4/01)^2}\approx 5+\frac{3}{5}\times -0/02+\frac{4}{5}\times 0/01=4/996$$

$$2)(1/98)^3(2/02)^2$$

$$f(x,y)=x^3y^2$$

$$1/98=2-0/02 \Rightarrow a=2, h=0/02$$

$$2/02=2+0/02 \Rightarrow b=2, \delta=0/02$$

$$f_x=3x^2y^2 \Rightarrow f_x(2,2)=48$$

$$f_y=2x^3y \Rightarrow f_y(2,2)=32$$

$$f(2,2)=32$$

$$(1/98)^3(2/02)^2 \approx 32-48\times 0/02+32\times 0/02=31/68$$

نقاط ماکسیمم، مینیمم نسبی یا زین اسبی یک تابع دو متغیره:

تعریف 4.2 نقطه $(a,b)\in D_f$ را یک نقطه بحرانی تابع دو متغیره f نامند هرگاه یک جواب دستگاه زیر باشد:

$$\begin{cases} f_x=0 \\ f_y=0 \end{cases}$$

به عنوان مثال، $(0,0)$ یک نقطه بحرانی تابع $f(x,y)=x^2+y^2$ است، زیرا:

$$\begin{cases} 2x=0 \Rightarrow x=0 \\ 2y=0 \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

فرض کنید $(a,b)\in D_f$ یک نقطه بحرانی تابع f باشد. برای تعیین نوع (ماکسیمم، مینیمم نسبی یا زین اسبی) این نقطه به ترتیب زیر عمل می کنیم:

$$\Delta = f_{xx}\times f_{yy}-(f_{xy})^2$$

1- اگر $\Delta(a,b)\succ 0$ و $f_{xx}(a,b)\succ 0$ ، آنگاه (a,b) مینیمم نسبی است.

2- اگر $\Delta(a,b)\succ 0$ و $f_{xx}(a,b)\prec 0$ ، آنگاه (a,b) ماکسیمم نسبی است.

3- اگر $\Delta(a,b)\prec 0$ ، آنگاه (a,b) زین اسبی است.

4- اگر $\Delta(a,b)=0$ ، این آزمون جواب نمی دهد.

مثال 8.2 نقاط ماکسیمم، مینیمم نسبی یا زین اسبی توابع زیر را در صورت وجود تعیین نمایید:

$$1)\ f(x,y)=x^2+y^2-xy+3x-2y+1$$

$$\underset{\times 2}{\begin{cases}2x-y+3=0\\ 2y-x-2=0\end{cases}}\Rightarrow\begin{cases}2x-y+3=0\\ 4y-2x-4=0\end{cases}\Rightarrow 3y-1=0\Rightarrow y=\frac{1}{3}$$

$$2x-\frac{1}{3}+3=0\Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

بنابراین $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ یک نقطه بحرانی است:

$$\begin{cases}f_{xx}=2\\ f_{yy}=2\\ f_{xy}=-1\end{cases}\Rightarrow\Delta=2\times 2-(-1)^2=3\succ 0$$

چون $f_{xx}=2\succ 0$ ، بنابراین $\left(-\frac{4}{3},\frac{1}{3}\right)$ مینیمم نسبی است.

$$2)\ f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$$

$$\begin{cases}3x^2+3y^2-15=0\\ 6xy-12=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+y^2-5=0\\ xy=2\Rightarrow y=\frac{2}{x}\end{cases}$$

$$x^2+\left(\frac{2}{x}\right)^2-5=0\Rightarrow x^4-5x^2+4=0\xrightarrow{x^2=t}t^2-5t+4=0\Rightarrow\Delta=9\Rightarrow t_1=4,t_2=1$$

نقاط بحرانی

$$x^2=4\Rightarrow x=\pm 2\xrightarrow{y=\frac{2}{x}}y=\pm 1\Rightarrow(2,1),(-2,-1)$$

نقاط بحرانی

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \xrightarrow{y=\frac{2}{x}} y = \pm 2 \Rightarrow (1,2), (-1,-2)$$

$$\begin{cases} f_{xx} = 6x \\ f_{yy} = 6x \Rightarrow \Delta = 36(x^2 - y^2) \\ f_{xy} = 6y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta(2,1) = 108 \succ 0 \\ f_{xx}(2,1) = 12 \succ 0 \end{cases} \Rightarrow$$ $(2,1)$ یک نقطه مینیمم نسبی است

چون $\Delta(-1,-2) = -108 \prec 0$ ، بنابراین $(-1,-2)$ زین اسبی است. دو نقطه دیگر را خودتان بررسی نمائید.

3) $f(x,y) = 2x^3 - 3x^2y - 12x^2 - 3y^2$

$$\begin{cases} 6x^2 - 6xy - 24x = 0 \\ -3x^2 - 6y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - xy - 4x = 0 \\ y = -\frac{3}{2}x^2 \end{cases}$$

$$x^2 + \frac{3}{2}x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(\frac{3}{2}x^2 + x - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow \Delta = 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \xrightarrow{y=-\frac{3}{2}x^2} y = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x = \frac{4}{3} \longrightarrow y = -\frac{8}{3} \Rightarrow \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}\right) \\ x = -2 \longrightarrow y = -6 \Rightarrow (-2,-6) \end{cases}$$

نقاط بحرانی

$$\begin{cases} f_{xx} = 12x - 6y - 24 \\ f_{yy} = -6 \\ f_{xy} = -6x \end{cases} \Rightarrow \Delta = -6(12x - 6y - 24) - 36x^2$$

$$\begin{cases} \Delta(0,0) = 144 \succ 0 \\ f_{xx}(0,0) = -24 \prec 0 \end{cases} \Rightarrow$$ $(0,0)$

یک نقطه زین اسبی است.

تمرینات

1- نشان دهید حدود زیر وجود ندارند:

$$a)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy^2}{x^2+y^4} \qquad c)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y}{x}$$

$$b)\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

2- برای هر از توابع داده شده، مقدار تقریبی آن را در نقطه داده شده بدست آورید:

$$a)\, f(x,y)=x^3-y^3+3x^2y-1 \qquad f(1/99,3/01)$$

$$b)\, f(x,y)=\sin x\cos y \qquad f(31^\circ,59^\circ)$$

3- مقدار تقریبی برای هر یک از اعداد زیر ارائه دهید:

$$a)(1/98)^3(2/02)^2$$

$$b)(1/02)^{3/01}$$

4- نقاط ماکسیمم، مینیمم نسبی یا زین اسبی توابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید:

$$a)\, f(x,y)=x^2-2xy+\frac{1}{3}y^3-3y$$

$$b)\, f(x,y)=x^3+3xy-y^2$$

$$c)\, f(x,y)=2x^3-3x^2y-12x^2-3y^2$$

$$d)\, f(x,y) = 2x^3 + 6xy + 3y^2$$

$$e)\, f(x,y) = x^2 + y^2 - 3xy + 2y - 4x + 1$$

$$f)\, f(x,y) = y^3 - 2xy - y + x^2 + 1$$

$$g)\, f(x,y) = \left(x^2 + y^2 + 1\right)^2$$

3- انتگرال های دوگانه

تعریف 1.3 فرض کنید $A \subseteq R^2$ و f یک تابع دو متغیره باشد. انتگرال دوگانه f روی A را با $\iint\limits_A f(x,y)dydx$ یا $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ نمایش داده و بصورت زیر محاسبه می کنند:

$$\iint\limits_A f(x,y)dydx = \int_a^b \left(\int_{h(x)}^{g(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{h(y)}^{g(y)} f(x,y)dx\right)dy$$

توجه داشته باشید که ترتیب انتگرالگیری مهم نیست. در هر حال جواب آنها یکی خواهد بود.

مثال 1.3 انتگرال های زیر را بدست می آوریم:

$$1)\int_0^1\int_0^1 (x+y)dydx$$

$$\int_0^1\left(\int_0^1 (x+y)dy\right)dx = \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\right)\Big|_0^1 = 1$$

$$2)\int_0^1\int_0^x (x+y)dydx$$

$$\int_0^1 \left(\int_0^x (x+y)dy\right)dx = \int_0^1 \left(xy+\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^x dx = \int_0^1 \left(x^2+\frac{x^2}{2}\right)dx = \frac{x^3}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$3)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 (y\cos x+2)dydx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 (y\cos x+2)dy\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{y^2}{2}\cos x+2y\right)\Big|_0^1 dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\cos x}{2}+2\right)dx = \left(\frac{\sin x}{2}+2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}+\pi$$

$4)\iint_A xy^2 dydx$ $\qquad A:$ ناحیه محدود به $y=x$ و $y=x^2$

$$\int_0^1\int_{x^2}^x xy^2 dydx = \int_0^1 x\frac{y^3}{3}\Big|_{x^2}^x dx = \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3}-\frac{x^7}{3}\right)dx = \frac{1}{3}\left(\frac{x^5}{5}-\frac{x^8}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right)$$

$5)\iint_A \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dxdy$ $\qquad A:$ مثلث محدود به خطوط $y=x$ ، $x=1$ و محور x

$$\int_0^1\left(\int_y^1 \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx\right)dy$$

انتگرال $\int \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx$ بر حسب توابع مقدماتی قابل بیان نیست. بنابراین باید ترتیب انتگرالگیری را عوض نمود:

$$\int_0^1\left(\int_0^x \cos(\frac{\pi}{2}x^2)dy\right)dx = \int_0^1 \cos(\frac{\pi}{2}x^2)y\Big|_0^x dx = \int_0^1 x\cos(\frac{\pi}{2}x^2)dx = \frac{1}{\pi}\sin(\frac{\pi}{2}x^2)\Big|_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

$$6)\int_0^1\int_x^1 e^{\frac{x}{y}}dydx$$

$$\int_0^1\left(\int_1^x e^{\frac{x}{y}}dy\right)dx$$

انتگرال $\int e^{\frac{x}{y}}dy$ بر حسب توابع مقدماتی قابل بیان نیست. بنابراین باید ترتیب انتگرالگیری را عوض نمود:

$$\int_0^1\int_0^y e^{\frac{x}{y}}dxdy=\int_0^1 ye^{\frac{x}{y}}\Big|_0^y dy=(e-1)\int_0^1 ydy=\frac{e-1}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}$$

تغییر متغیر در انتگرال های دوگانه:

فرض کنید $x=h(u,v)$ و $y=g(u,v)$ توابعی بر حسب u و v باشند. آنگاه:

$$\iint\limits_A f(x,y)dydx=\iint\limits_{A'} f(h(u,v),g(u,v))J(u,v)dudv$$

که:

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}=x_uy_v-x_vy_u$$

مثال 2.3 مقدار انتگرال های زیر را به کمک تغییر متغیر داده شده بدست می آوریم:

$$1)\int_0^1\int_0^{1-x}(x-y)^4(x+y)^5dydx \qquad x-y=u \qquad x+y=v$$

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases}\overset{+}{\Rightarrow}2x=u+v\Rightarrow x=\frac{u+v}{2}\xrightarrow{y=v-x}y=\frac{v-u}{2}$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x+y=1\Rightarrow v=1 \\ y=0\Rightarrow u=v \\ x=0\Rightarrow u=-v \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}(x-y)^4(x+y)^5dydx=\int_0^1\int_{-v}^{v}u^4v^5dudv$$

$$=\frac{2}{5}\int_0^1 v^5u^5\Big|_0^v dv=\frac{2}{55}v^{11}\Big|_0^1=\frac{2}{55}$$

$$2)\iint_R \frac{x-y}{x+y+1}dydx \qquad R:\ x-y=\pm 1 \text{ و } x+y=\pm 1 \text{ ناحیه محدود به خطوط}$$

$$\begin{cases} x-y=u \\ x+y=v \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 2x=u+v \Rightarrow x=\frac{u+v}{2} \xrightarrow{y=v-x} y=\frac{v-u}{2}$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} x+y=1 \Rightarrow v=1 \\ x+y=-1 \Rightarrow v=-1 \\ x-y=1 \Rightarrow u=1 \\ x-y=-1 \Rightarrow u=-1 \end{cases}$$

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y+1}dydx=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\frac{u}{v+1}dudv=\int_{-1}^{1}\frac{1}{v+1}\left(\int_{-1}^{1}udu\right)dv=0$$

$$3)\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}dydx \qquad\qquad x+y=u \qquad\qquad y=uv$$

$$x+y=u \xrightarrow{y=uv} x=u(1-v)$$

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix}=u$$

$$\begin{cases} x+y=1 \Rightarrow u=1 \\ y=0 \Rightarrow u=0 or v=0 \\ x=0 \Rightarrow u=0 or v=1 \end{cases}$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x} e^{\frac{y}{x+y}}dydx = \int_0^1\int_0^1 ue^u dudv = (u-1)e^u\Big|_0^1 = 1$$

$$4)\int_1^2\int_{x+2}^{x+3}\frac{dydx}{\sqrt{xy-x^2}}$$

$$x = u, y = u + v$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{cases} y = x+2 \Rightarrow u+v = u+2 \Rightarrow v = 2 \\ y = x+3 \Rightarrow u+v = u+3 \Rightarrow v = 3 \\ x = 1 \Rightarrow u = 1 \\ x = 2 \Rightarrow u = 2 \end{cases}$$

$$\int_1^2\int_{x+2}^{x+3}\frac{dydx}{\sqrt{xy-x^2}} = \int_2^3\int_1^2\frac{dudv}{\sqrt{uv}} = 2\sqrt{v}\Big|_2^3 \times 2\sqrt{u}\Big|_1^2 = 4(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$$

$$5)\int_0^2\int_{2x}^{2-2x}(4x^2-y^2)^4 dydx \qquad u = 2x - y \qquad v = 2x + y$$

$$\begin{cases} 2x - y = u \\ 2x + y = v \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} 4x = u + v \Rightarrow x = \frac{u+v}{4} \xrightarrow{y=v-2x} y = \frac{v-u}{2}$$

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} y = 2x \Rightarrow y - 2x = 0 \Rightarrow u = 0 \\ y + 2x = 2 \Rightarrow v = 2 \\ y = 0 \Rightarrow u = v \end{cases}$$

$$\frac{1}{4}\int_0^2\int_0^v u^4v^4dudv=\frac{1}{20}\int_0^2 v^4u^5\Big|_0^v dv=\frac{1}{200}v^{10}\Big|_0^2=\frac{2^{10}}{200}$$

مختصات قطبی:

فرض کنید نمایش یک نقطه در مختصات دکارتی بصورت (a,b) باشد. آنگاه مختصات قطبی آن بصورت (r,θ) است که r و θ بصورت زیر بدست می آیند:

$$r=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\theta=\begin{cases}\arctan(\frac{b}{a}) & a\succ 0\\ \frac{\pi}{2} & a=0\prec b\\ \frac{3\pi}{2} & a=0\succ b\\ \arctan(\frac{b}{a})+\pi & a\prec 0\end{cases}$$

مثال 3.3 مختصات قطبی $(-1,1)$ را بدست می آوریم:

$$r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$\theta=\arctan(-1)+\pi=-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$$

بنابراین نمایش $(-1,1)$ در مختصات قطبی بصورت $\left(\sqrt{2},\frac{3\pi}{4}\right)$ است.

تغییر متغیر در مختصات قطبی:

در حل یک انتگرال، اگر عبارت x^2+y^2 وجود داشته یا ناحیه انتگرالگیری دایره باشد، از تغییر مختصات قطبی جهت حل آن استفاده می شود:

$$\iint_R f(x,y)dydx = \iint_{R'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

مثال 4.3 انتگرال های زیر را بدست می آوریم:

$1)\iint_R (x^2+y^2)dydx$ $R:$ دایره ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع یک

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 r dr d\theta = \frac{\pi}{2} r^4 \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

$$2)\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1-(x^2+y^2))dydx$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^1 (1-r^2) r dr d\theta = \pi(\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4})\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

$3)\iint_R \sqrt{x^2+y^2}dydx$ $R:$ ناحیه ی محدود به $x^2+y^2=9$ و $x^2+y^2=4$

$$\int_0^{2\pi}\int_2^3 \sqrt{r^2} r dr d\theta = \frac{2\pi}{3} r^3 \Big|_2^3 = \frac{38\pi}{3}$$

مساحت یک ناحیه:

فرض کنید $A \subseteq R^2$. مساحت A را می توان به کمک انتگرال دوگانه زیر بدست آورد:

$$\iint_A dydx$$

مثال 5.3 مساحت هر یک از نواحی داده شده زیر را به کمک انتگرال دوگانه می یابیم:

الف: دایره ای به مرکز $(0,0)$ و شعاع a:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a r dr d\theta = \pi r^2 \Big|_0^a = \pi a^2$$

ب: مثلث محدود به $y=x$، $x=1$ و محور x:

$$\int_0^1\int_0^x dydx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

پ: ناحیه محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$:

$$\int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3})\Big|_0^1=\frac{1}{3}$$

ت: ناحیه محدود به $x^2-y^2=1$ ، $x^2-y^2=4$ ، $y=0$ و $y=\frac{x}{2}$:

$$\begin{cases} x^2-y^2=u \\ \dfrac{y}{x}=v \end{cases} \Rightarrow J(x,y)=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}=2-2(\frac{y}{x})^2=2-2v^2$$

$$\Rightarrow J(u,v)=\frac{1}{2(1-v^2)}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}}\int_1^4\frac{1}{1-v^2}dudv=\frac{3}{4}\ln(\frac{1+v}{1-v})\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}\ln 3$$

تمرینات

1- مقدار انترگال های دوگانه زیر را بیابید:

$$a)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_0^{x^2}\frac{1}{x}\cos(\frac{y}{x})dydx$$

$$b)\int_0^1\int_{4x}^4 e^{-y^2}dydx$$

$$c)\int_0^2\int_0^1 xydydx$$

$$d)\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}(7-x^2-y^2)dydx$$

ناحیه محدود بین خطوط $x=0$ ، $y=1$ و $R: \ y=\sqrt{x}$

$e)\iint_R e^{\frac{x}{y}}dydx$

$f)\iint_R \frac{\sin x}{x}dxdy$ مثلث محدود به $y=x$ ، $x=1$ و محور x : R

$g)\int_0^1\int_0^{1-x}\cos(\frac{x-y}{x+y})dydx \qquad x-y=u \qquad x+y=v$

$h)\iint_R (\frac{x-y}{x+y+1})^2 dydx$ ناحیه محدود به خطوط $x+y=\pm 1$ و $R: \ x-y=\pm 1$

$i)\iint_R \frac{y}{x}dydx \quad R:$ ناحیه مربوط به قسمت ت مثال 5.3 است.

$j)\int_0^1\int_x^1 \cos y^2 dydx$

4- دنباله ها و سری های نامتناهی

تعریف 1.4: هر تابع از N بتوی R را یک دنباله می نامند. هر یک از توابع زیر یک دنباله هستند:

$$\begin{aligned} N &\to R \\ n &\mapsto \frac{1}{n} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N &\to R \\ n &\mapsto n^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} N &\to R \\ n &\mapsto \sin n \end{aligned}$$

دنباله ها را معمولا با (a_n) ، (b_n) ،... نمایش می دهند.

دنباله $(\frac{1}{n})$ را در نظر بگیرید. مقادیر این دنباله بصورت زیر هستند:

$$1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},...$$

همانطور که ملاحظه می کنید، مقادیر به سمت صفر میل می کنند. در اینجا می گویند حد دنباله برابر با صفر است و بصورت $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ نمایش می دهند.

تعریف 2.4: گوئیم حد دنباله (a_n) وقتی n به سمت ∞ میل می کند برابر با l است و با $\lim_{n\to\infty}a_n=l$ نمایش می دهند هرگاه:

$$\forall\varepsilon\succ 0\ \ \exists M\in N;\ n\succ M\Rightarrow|a_n-l|\prec\varepsilon$$

تعریف 3.4: دنباله (a_n) را همگرا (واگرا) نامند هرگاه $\lim_{n\to\infty}a_n$ موجود باشد (نباشد).

مثال 4.4: به کمک تعریف حد دنباله نشان می دهیم که $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$:

فرض کنید $0\prec\varepsilon$ داده شده باشد بطوریکه $\left|\frac{1}{n}\right|\prec\varepsilon$. داریم:

$$\frac{1}{n}\prec\varepsilon\Rightarrow n\succ\frac{1}{\varepsilon}$$

بنابراین کافیست $M=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ در نظر گرفته شود.

قضیه 5.4: فرض کنید r یک عدد حقیقی باشد. دنباله (r^n) همگراست اگر و فقط اگر $|r|\prec 1$.

بنا به قضیه 5.4، دنباله های $(\frac{1}{2^n})$ و $((\frac{-1}{3})^n)$ دنباله هایی همگرا هستند. همچنین دنباله های (2^n) و $((-1)^n)$ واگرا هستند.

قضیه 6.4: فرض کنید $p(n)=a_kn^k+...+a_0$ و $q(n)=b_mn^m+...+b_0$ دو چند جمله ای به ترتیب از درجه k و m باشند. آنگاه:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p(n)}{q(n)}=\begin{cases}\infty & if k \succ m\\ 0 & if k \prec m\\ \frac{a_k}{b_k} & if k = m\end{cases}$$

مثال 7.4: حدود زیر را بدست می آوریم:

$$1)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n+1}=\frac{1}{3}\qquad 2)\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+1}=\infty\qquad 3)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0$$

توجه داشته باشید که حدود دنباله ها را می توان بر اساس قوانینی که در ریاضی 1 جهت بدست آوردن حدود توابع بدست آورد تعیین نمود. به مثال زیر توجه کنید:

مثال 8.4: نشان می دهیم $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$:

$$y=\sqrt[x]{x}\Rightarrow \ln y=\frac{\ln x}{x}\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\ln y=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$$

$$\stackrel{H}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=e^0=1$$

قضیه 9.4: فرض کنید $p(n)$ یک چندجمله ای دلخواه باشد. آنگاه $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{p(n)}=1$.

تعریف 10.4: فرض کنید a_n یک دنباله از اعداد حقیقی باشد. مجموع جملات a_n را با $\sum_1^\infty a_n$ نمایش داده و آن را سری نامتناهی نامند:

$$\sum_1^\infty a_n=a_1+a_2+a_3+\dots$$

تعریف 11.4: سری $\sum_1^\infty a_n$ را در نظر بگیرید. برای هر $n\in N$، تعریف می کنیم:

$$s_1=a_1$$

$$s_2=a_1+a_2$$

$$s_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

دنباله (s_n) را دنباله مجموع های جزئی سری $\sum_1^\infty a_n$ نامند.

تعریف 12.4: سری $\sum_1^\infty a_n$ را همگرا (واگرا) نامند هر گاه (s_n) همگرا (واگرا) باشد.

توجه داشته باشید که در صورت همگرایی (s_n)، $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sum_1^\infty a_n$.

مثال 13.4: در همگرایی ای واگرایی سری های زیر بحث می کنیم:

$$1)\sum_1^\infty (-1)^n$$

$$s_1 = -1 \qquad s_2 = -1+1=0 \qquad s_3 = -1+1-1=-1 \qquad \ldots$$

بنابراین $s_n = \begin{cases} -1 & odd \\ 0 & even \end{cases}$. چون $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ وجود ندارد، بنابراین $\sum_1^\infty (-1)^n$ واگراست.

$$2)\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n}$$

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2-(\frac{1}{2})^{n-1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = 2-0=2$$

بنابراین $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2^n} = 2$.

قضیه 14.4: فرض کنید a یک عدد حقیقی باشد. آنگاه:

$$\sum_{0}^{\infty} ar^n = \begin{cases} \dfrac{a}{1-r} & |r| \prec 1 \\ divergent & o.w \end{cases}$$

مثال 15.4: $\sum_{0}^{\infty} 2^n$ یک سری واگرا و $\sum_{0}^{\infty} \frac{2}{3^n}$ یک سری همگرا با مقدار 3 است.

همانطور که ملاحضه کردید، براحتی می توان مقدار سری های قضیه قبل را در صورت همگرایی بدست آورد. اما در ارتباط با مقادیر سری های همگرا در این جزوه بحث نمی کنیم.

قضیه 16.4: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ ، آنگاه $\sum_{1}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثال 17.4: هر یک از سری های زیر بنا به قضیه قبل واگرا هستند:

$$1)\sum_{1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$$

$$2)\sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \neq 0$$

توجه داشته باشید که گام اول در تعیین همگرایی یا واگرایی یک سری بررسی شرط قضیه قبل است. قبل از ورود به محک های تعیین همگرایی یک سری، ابتدا با یک سری خاص آشنا می شویم.

قضیه 18.4 (p- سری) :

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} convergene & p \succ 1 \\ divergence & p \leq 1 \end{cases}$$

مثال 19.4: سری $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ واگرا و $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ همگراست.

آزمون های همگرایی:

فرض کنید $\sum_{1}^{\infty} a_n$ یک سری باشد.

1- آزمون نسبت:

فرض کنید $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$.

الف: اگر $l \prec 1$، آنگاه $\sum_{1}^{\infty} a_n$ همگراست.

ب: اگر $l \succ 1$ ، آنگاه $\sum_{1}^{\infty} a_n$ واگراست.

پ: اگر $l = 1$ ، این آزمون جواب نمی دهد.

مثال 20.4: در همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث کنید:

$$1)\sum_{1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\dfrac{2^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 0 \prec 1$$

همگرا

$$2)\sum_{0}^{\infty}\frac{3^n}{n5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}}{\dfrac{3^n}{n5^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{5}\frac{n}{n+1} = \frac{3}{5} \prec 1$$

همگرا

2- آزمون ریشه:

فرض کنید $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=l$.

الف: اگر $l\prec 1$ ، آنگاه $\sum_{1}^{\infty}a_n$ همگراست.

ب: اگر $l\succ 1$ ، آنگاه $\sum_{1}^{\infty}a_n$ واگراست.

پ: اگر $l=1$ ، این آزمون جواب نمی دهد.

مثال 21.4: در همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث کنید:

$$1)\sum_{1}^{\infty}\frac{3^n}{n5^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n}{n5^n}}=\frac{3}{5}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{3}{5}\prec 1$$ همگرا

$$2)\sum_{0}^{\infty}e^{-n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{e^{-n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{-n}=0\prec 1$$ همگرا

3- آزمون انتگرال:

فرض کنید $\sum_{1}^{\infty}a_n$ یک سری باشد. فرض کنید $f(x)=a_x$. اگر برای هر $x\geq 1$ ، f تابعی پیوسته، نزولی و نامنفی باشد، آنگاه همگرایی (واگرایی) $\sum_{1}^{\infty}a_n$ و $\int_{1}^{\infty}f(x)dx$ با هم معادلند.

مثال 22.4: در همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث می کنیم:

$$1)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

$$f(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{m\to\infty}\int_{1}^{m}\frac{1}{x}dx=\lim_{m\to\infty}(\ln m-0)=\infty$$ واگرا

$$2)\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2}\Rightarrow\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{m\to\infty}\int_{1}^{m}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{m\to\infty}(-\frac{1}{m}+1)=1$$ همگرا

$$3)\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

$$f(x)=\frac{1}{x\ln x}\Rightarrow\lim_{m\to\infty}\int_{2}^{m}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{m\to\infty}(\ln(\ln m)-\ln(\ln 2))=\infty$$ واگرا

4- آزمون مقایسه حدی:

فرض کنید $\sum_{1}^{\infty}a_n$ یک سری و $\lim_{n\to\infty}n^p a_n=l$. آنگاه:

1- اگر $p\succ 1$ و $l\neq\infty$ ، آنگاه سری همگراست.

2- اگر $p\leq 1$ و $l\neq 0$ ، آنگاه سری واگراست.

از آزمون مقایسه حدی جهت تعیین همگرایی یا واگرایی سری های به شکل $\sum_{1}^{\infty}\frac{p(n)}{q(n)}$ که p و q دو چندجمله ای هستند، بهره می برند.

مثال 23.4: در همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث می کنیم:

$$1)\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{n^2+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}=1\neq 0$$ واگرا

$$2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+3}{n^3+2n}$$

$$\lim_{n\to\infty} n^2\frac{4n+3}{n^3+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+3n^2}{n^3+2n}=4$$ همگرا

تمرینات

1- به کمک آزمون انتگرال نشان دهید که $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ همگراست اگر و فقط اگر $p \succ 1$.

2- در همگرایی یا واگرایی سری های زیر بحث کنید:

$$1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10^{2n}}{(2n-1)!}$$

$$2)\sum_{2}^{\infty}\frac{(\sqrt{5}-1)^{n}}{n^{2}+1}$$

$$3)\sum_{1}^{\infty}\frac{2n+1}{2n^{3}-n}$$

$$4)\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)e^{n}}$$

$$5)\sum_{2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{2}}$$

$$6)\sum_{1}^{\infty}\frac{n}{2^{n}}$$