تعریف ۱.۲: فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. آنگاه هر زیر مجموعه از $A\times B$ را یک رابطه از A به B نامیده و با R نمایش می دهند. یک رابطه از A به A را معمولا یک رابطه در A نامند.

مثال ۲.۲: فرض کنید $A=\{1,2,3\}$ و $B=\{3,5\}$. آنگاه $R_1=\{(1,3),(1,5),(2,5),(3,3)\}$ یک رابطه از A به B محسوب می شود. همچنین هر یک از موارد زیر یک رابطه در A می باشند:

$$R_2=\{(1,1),(1,2),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$$R_3=\{(1,3),(2,1),(3,1),(1,2),(3,3)\}$$

$$R_4=\{(1,1),(1,2),(2,2),(3,2),(3,3)\}$$

- برای نمایش $(a,b)\in R$ از نماد aRb استفاده می نمائیم.

تعریف ۳.۲: فرض کنید $A=\{a_1,...,a_n\}$ یک مجموعه n عضوی، $B=\{b_1,...,b_m\}$ یک مجموعه m عضویو R یک رابطه از A به B باشد. آنگاه ماتریس $M_R=(m_{ij})_{n\times m}$ که در آن m_{ij} بصورت زیر تعریف می شود را ماتریس رابطه R نامند:

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,a_j)\in R\\ 0 & (a_i,a_j)\notin R\end{cases}$$

مثال ۴.۲: ماتریس هر یک از روابط مثال ۲.۲ بصورت زیر می باشد:

$$M_{R_1}=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\\1&0\end{bmatrix}\qquad M_{R_2}=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&1&1\end{bmatrix}$$

تعریف ۵.۲: ماتریسی که درایه های آن فقط صفر و یک باشند را ماتریس بولی نامند.

توجه داشته باشید که ماتریس هر رابطه یک ماتریس بولی است.

تعریف ۶.۲: رابطه ی R در A را یک رابطه ی بازتابی نامند هرگاه برای هر $a \in A$، aRa.

روابط R_2 و R_4 از مثال ۲.۲ روابطی بازتابی هستند.

تعریف ۷.۲: رابطه ی R در A را یک رابطه ی متقارن نامند هرگاه aRb نتیجه دهد bRa.

رابطه ی R_3 از مثال ۲.۲ یک رابطه متقارن است.

تعریف ۸.۲: رابطه ی R در A را یک رابطه ی متعدی نامند هرگاه aRb و bRc نتیجه دهد aRc.

رابطه ی R_4 از مثال ۲.۲ یک رابطه متعدی است.

- درایه های قطر اصلی ماتریس یک رابطه بازتابی همگی برابر یک می باشند.
- ماتریس یک رابطه متقارن، متقارن است.

تعریف ۹.۲: رابطه ی R در A را یک رابطه ی هم ارزی نامند هرگاه بازتابی، متقارن و متعدی باشد.

مثال ۱۰.۲: رابطه R را را روی مجموعه ی $A = Z - \{0\}$ بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$aRb \Leftrightarrow \frac{a}{b} \in Z$$

R بازتابی است زیرا $\frac{a}{a} = 1 \in Z$ و بنابراین aRa.

R متقارن نیست زیرا $\frac{2}{1} \in Z$ اما $\frac{1}{2} \notin Z$.

R متعدی است زیرا :

$$\begin{cases} aRb \\ bRc \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{b} \in Z \\ \frac{b}{c} \in Z \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} \times \frac{b}{c} = \frac{a}{c} \in Z \Rightarrow aRc$$

تعریف ۱۱.۲: متمم R را با $\bar{R}$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$a\bar{R}b \Leftrightarrow a\not{R}b$$

به عنوان مثال متمم R_2 از مثال ۲.۲ بصورت $\bar{R}_2 = \{(1,3),(2,1),(3,1)\}$ می باشد.

تعریف ۱۲.۲: اجتماع R و S را با $R \bigcup S$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$aR \bigcup Sb \Leftrightarrow aRb \text{ یا } aSb$$

تعریف۱۳.۲: اشتراک R و S را با $R \bigcap S$ نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$aR \bigcap Sb \Leftrightarrow aRb \text{ و } aSb$$

تعریف ۱۴.۲: معکوس R را با R^{-1} نمایش داده و بصورت زیر تعریف می کنند:

$$aR^{-1}b \Leftrightarrow bRa$$

قضیه ۱۵.۲: فرض کنید R و S دو رابطه از A به B باشند. آنگاه:

1) $R \subseteq S \Rightarrow R^{-1} \subseteq S^{-1}$
2) $R \subseteq S \Rightarrow \bar{S} \subseteq \bar{R}$
3) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$
4) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$
5) $(\overline{R \cup S}) = \bar{R} \cap \bar{S}$
6) $(\overline{R \cap S}) = \bar{R} \cup \bar{S}$

7) اگر R بازتابی باشد آنگاه R^{-1} نیز بازتابی است.
8) اگر R بازتابی باشد آنگاه $\bar{R}$ ضد بازتابی است.
9) اگر R و S بازتابی باشند آنگاه $R \cup S$ و $R \cap S$ نیز بازتابی هستند.

اثبات (۱): فرض کنید $aR^{-1}b$. آنگاه bRa. چون $R \subseteq S$، بنابراین bSa . در نتیجه $aS^{-1}b$.

(۲): فرض کنید $a\bar{S}b$. آنگاه $a\not{S}b$. چون $R \subseteq S$، بنابراین $a\not{R}b$. در نتیجه $a\bar{R}b$.

(۴): فرض کنید $a\left(R\cap S\right)^{-1}b$. آنگاه $b\left(R\cap S\right)a$. در نتیجه bRa و bSa. بنابراین $aR^{-1}b$ و $aS^{-1}b$. این نشان می دهد که $a\left(R^{-1}\cap S^{-1}\right)b$.

(۷): فرض کنید R بازتابی و $a\in A$. آنگاه aRa. در نتیجه $aR^{-1}a$. بنابراین R^{-1} بازتابی است.

تعریف ۱۶.۲: ماتریس بولی A را بزرگتر یا مساوی ماتریس بولی B نامیده و با $B\le A$ نمایش می دهند هرگاه درایه های A نظیر به نظیر از درایه های B بزرگتر یا مساوی باشند.

به عنوان مثال $\begin{bmatrix}1&1&1\\1&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$.

- فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد. آنگاه $A\times A$ دارای n^2 عضو می باشد. بنابراین $A\times A$ دارای 2^{n^2} زیرمجموعه می باشد. در نتیجه تعداد روابط در A برابر با 2^{n^2} می باشد.

مثال ۱۷.۲: فرض کنید $A=\{1,2,3,4\}$. می خواهیم تعداد روابط بازتابی در A را بیابیم که 8 عضوی بوده، شامل $(1,2)$ بوده و $(1,4)$ را شامل نشود:

برای یافتن تعداد روابط فوق می توان از ماتریس رابطه استفاده نمود. با توجه به بازتابی بودن، درایه های روی قطر اصلی همگی برابر با یک هستند. ۸ عضوی بودن رابطه نیز بدان معناست که ماتریس باید دارای ۸ عضو یک باشد. با توجه به توضیحات و اطلاعات مسئله داریم:

$$\begin{bmatrix}1&1&[\ ]&0\\ [\ ]&1&[\ ]&[\ ]\\ [\ ]&[\ ]&1&[\ ]\\ [\ ]&[\ ]&[\ ]&1\end{bmatrix}$$

جواب مسئله متناظر است با انتخاب سه مربع از ده مربع موجود و قرار دادن یک در آن ها:

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!7!}=120$$

مثال ۱۸.۲: می خواهیم تعداد روابط متقارن روی $A=\{1,2,3,4\}$ را بیابیم:

جواب مسئله متناظر است با تعداد ماتریس های متقارن 4×4 که برابر است با $2^{\frac{n^2+n}{2}}$.

مثال ۱۹.۲: می خواهیم تعداد ر وابط بازتابی R روی یک مجموعه سه عضوی را بیابیم بطوریکه داشته باشیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \le M_R$$

با توجه به بازتابی بودن R، درایه های قطر اصلی M_R همگی باید یک باشند. بنا به اطلاعات مسئله خواهیم داشت:

$$M_R=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ [\ ] & 1 & [\ ] \\ [\ ] & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

هر کدام از مربع ها با دو عدد صفر یا یک می توانند پر شوند. بنابراین جواب مسئله برابر است با $2^3=8$.

تمرینات

۱- نشان دهید اشتراک دو رابطه هم ارزی یک رابطه هم ارزی است. آیا این مسئله در حالت اجتماع نیز برقرار است؟

۲- رابطه R را روی Z بصورت زیر تعریف می کنیم. نشان دهید R یک رابطه هم ارزی است:

$aRb \Leftrightarrow$ $a-b$ مضربی از ۲ باشد

۳ـ تعداد روابط متقارن R که روی مجموعه چهار عضوی $\{a,b,c,d\}$ می توان نوشت بطوریکه شامل (a,b) بوده، (d,a) را شامل نبوده و در شرط زیر صادق باشد را بیابید:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \ll M_R$$